神戸学院法学第36巻第２号（2006年12月）

Four mutually unbiased basis constructed from cyclic spin models on 4 vertices

生　田　卓　也

Abstract

In [3] Chris Godsil and Adison Roy showed that for every spin models W with a unitary type II matrix the column sets of the identity matrix I, W, and D_jW for some diagonal matrices D_j form three mutually unbiased basis. Starting from these results, we are interested in how to construct four mutually unbiased basis from unitary spin models. In this paper, at the first step of this study, we give the possible numerical evaluation for the existence of four mutually unbiased basis constructed from cyclic spin models on 4 vertices.

Keywords: association scheme, spin model, mutually unbiased basis.

1　序　　論

スピンモデルの概念は Vaughan Jones [7] による。スピンモデルがあれば，knot や link の不変量を定義できる。スピンモデルは本質的に２つの条件（type II と type III の条件）を満たす０でない成分をもつ正方行列 W で定義される。Jones が最初に定義したスピンモデルは対称行列である。その後，[8] により非対称スピンモデルに一般化された。

スピンモデルは非常に豊かな数学的構造を持つ。我々はスピンモデルと関連ある更なる数学的対象を追い求め，その豊かさを実証しなければならない。坂内-坂内は［1］で位数 m の有限巡回群 $\mathbb{Z}_m$ 上の group association schemes $\mathfrak{X}(\mathbb{Z}_m)$ で，スピンモデルが組織的に構成できることを示した。これらのスピンモデルは，ユニタリー（すなわち，ある正方行列 M に対して，${}^t\overline{M}M=mI$（m は M の行列サイズ））の条件をもつ。一方，ユニタリーでないスピンモデルの例も多く存在する。例えば，野村による Hadamard spin models（［9］）や，最近筆者が構成した無限系列のスピンモデル（［4］，［5］）である。

［3］で Godsil-Roy は，ユニタリーなスピンモデル W が存在すれば，単位行列 I と W，D_jW（D_j は W から作られるある対角行列）の3つの行列の各列ベクトルは，mutually unbiased basis（MUB）になることを示した。一般に，幾つの mutually unbiased basis が存在するのかは今も大問題である。Mutually unbiased basis の存在は，量子情報や作用素環と密接な関係にあることが知られている。

我々は［3］の結果を立脚点に，次の2つのアプローチを考える：

Approach 1. Godsil-Roy の結果による I, W, D_jW の3つの mutually unbiased basis の構成後に，4番目の行列が mutually unbiased basis であるような行列が存在するかどうかを考察する。

Approach 2. Godsil-Roy の結果から離れて，I, W の後に3番目の行列 D_1W が mutually unbiased basis であるような対角行列 D_1 を再構築する。その上で，4番目の行列 D_2W に対して mutually unbiased basis が存在するかどうかを調べる。

これらのアプローチが正しいものかどうかを判定するために，点の位数が小さな場合から考察する。我々は最初のステップとして，位数 $4(=2^2)$ のスピンモデル W_4 から出発する。位数 $4(=2^2)$ の maximal mutually unbiased basis は5個存在することが知られている。しかしなが

ら，我々のアプローチは，スピンモデルから出発して幾つの mutually unbiased basis が存在するかということを目的にしている。

§.5.1の命題5.2で **Approach 1** は自明な場合に帰着することを示す。更に，§.5.2で **Approach 2** について考察し，次の結果を示す：

D_1 と D_2 は対角行列で，次のようにおく：

$$D_1=\mathrm{diag}[\cos(\theta_j)+i\sin(\theta_j)]_{1\le j\le 4},$$
$$D_2=\mathrm{diag}[\cos(\phi_j)+i\sin(\phi_j)]_{1\le j\le 4},\quad (i^2=-1). \tag{1}$$

定理1.1. W_4を４点の有限巡回群 $\mathbb{Z}_4$ 上のスピンモデルとする。(１)で

$$\theta_1=\theta_2+\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{1}{3}\right),\ \theta_3=\theta_2-\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)$$

$$\theta_4=\theta_2+\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)$$

とおく。また，

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)<\phi_1-\phi_2<\arccos\left(\frac{\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}{1+2\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}\right)$$

を満たすある値 $\phi_1-\phi_2$ に対して，

$$\phi_2-\phi_3=\arccos\left(\frac{\cos(\phi_1-\phi_2)}{2\cos(\phi_1-\phi_2)-1}\right)$$

とおく。このとき，

$$\cos((\theta_2-\theta_3)-(\phi_2-\phi_3))=\frac{\cos((\theta_1-\theta_2)-(\phi_1-\phi_2))}{2\cos((\theta_1-\theta_2)-(\phi_1-\phi_2))-1}$$

が成り立つ。

定理1.1は，数式処理システム Maple 10.03を使っての数値計算の結果である。従って，現時点で $\phi_1-\phi_2$ の値を explicit に目で見える形に記述できていない. すなわち，$\phi_1-\phi_2$ は代数的な解として得られていない。また，定理1.1はごく一部の考察で現れた結果であり，これにより４つの mutually unbiased basis が構成できるなら，他の場合の考察にお

いても4つの mutually unbiased basis を構成する D_1 と D_2 をスピンモデルとリンク付けて見つけることが出来る。

2　スピンモデルと mutually unbiased basis の定義

X を位数 n の有限集合とする。$Mat_X(\mathbb{C})$ で行と列が X の元で順序付けられた複素数体 $\mathbb{C}$ 上の全行列環とする。W の (α,β) 成分を $W(\alpha,\beta)$ で表す。$W \in Mat(\mathbb{C})$ が type II matrix であるとは，任意の $\alpha,\gamma \in X$ に対して，

$$\sum_{x\in X}\frac{W(\alpha,x)}{W(\beta,x)}=n\delta_{\alpha,\beta} \qquad (\delta \text{ は Kronecker's symbol})\}$$

が成り立つときと定義する。type II matrix W が type III matrix であるとは，任意の $\alpha,\beta,\gamma \in X$ に対して，

$$\sum_{x\in X}\frac{W(\alpha,x)W(\beta,x)}{W(\gamma,x)}=L\frac{W(\alpha,\beta)}{W(\alpha,\gamma)W(\gamma,\beta)}$$

が成り立つときと定義する。$L^2=n$ で，L を W の loop variable と呼ぶ。$W \in Mat_X(\mathbb{C})$ が type II, III matrix であるとき，W を loop variable L のスピンモデルと呼ぶ。

同じ行列サイズ $m\times n$ の行列 $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le m}}=(a_1,\cdots\cdots,a_n)$，$B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le m}}=(b_1,\cdots\cdots,b_n)$ は，

$i,j\in\{1,\cdots\cdots,n\}$ に対して a_i と b_j のノルム（norm）

$$|\langle a_i,b_j\rangle|=\left|\sum_{k=1}^{m}a_{k,i}\overline{b_{k,j}}\right|$$

が i と j の取り方に依らずに常に一定であるとき，A と B は mutually unbiased basis であると呼ぶ。一般に，複素数 $\alpha_j=a_j+b_j i(a_j,b_j\in\mathbb{R},\ i^2=-1$ に対して，α_j のノルム $|\alpha_j|$ は

$$|\alpha_j|=\sqrt{a_j^2+b_j^2}$$

で定義される。右辺は $a_j^2+b_j^2$ を計算したときに，＋の平方根を取っているだけなので，我々は

$$|\alpha_1|=|\alpha_2| \Longleftrightarrow a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2$$

と見なすことができる。

σ を $\{1, \cdots\cdots, n\}$ から $\{1, \cdots\cdots, n\}$ への全単射とする。$j=1, \cdots\cdots, n$ に対して，次の式を満たす複素数 c_σ が存在するなら，A は B に自明な mutually unbiased basis（MUB）行列であると定義し，$A \sim B$ と書く：

$$\mathbf{a}_j=c_\sigma \mathbf{b}_{\sigma(j)}.$$

$\sim$ は同値類をなす。従って，我々は自明でない mutually unbiased basis のみに興味がある。

3 Godsil と Roy によるスピンモデルから構成される 3 つの mutually unbiased basis

X を位数 n の有限集合とする。W は X 上のユニタリーなスピンモデルとする。W^- の (α, β) 成分を

$$W^-(\alpha, \beta)=W(\beta, \alpha)^{-1}$$

で定義する。

$D_j(j=1, \cdots\cdots, n)$ は対角行列で，第 r 成分を

$$D_j(r, r)=\sqrt{n}\, W^-(r, j)$$

で定義する。このとき，次の定理が成り立つ：

定理3.1（C. Godsil and A. Roy）. W をユニタリーなスピンモデルとする。このとき，単位行列 I, W, D_jW（$j=1, \cdots\cdots, n$）の各列ベクトルは 3 つの mutually unbiased basis をつくる。

定理3.1を位数 4 に制限して，この結果の状況を説明する。位数 4 の巡回群上のスピンモデル W_4 は，次の形で与えられる（[1]，[8]）：

$$W_4=\begin{pmatrix} 1 & \xi & 1 & \xi^5 \\ \xi^5 & 1 & \xi & 1 \\ 1 & \xi^5 & 1 & \xi \\ \xi & 1 & \xi^5 & 1 \end{pmatrix}$$

但し，$\xi=\exp(2\pi\sqrt{-1}/8)$ である。この例に対して，[3] で現れる対

角行列 D_j=1, 2, 3, 4）は次で与えられる：（但し，１の原始８剰根として $\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ とおく。$i^2=-1$ である。）

$$D_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_3=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \end{pmatrix},\quad D_4=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

４つの D_1, D_2, D_3, D_4 に対して，$D_1W_4, D_2W_4, D_3W_4, D_4W_4$ を計算すると，次を得る：

$$D_1W_4=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) \end{pmatrix},$$

$$D_2W_4=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$D_3W_4=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) \end{pmatrix},$$

$$D_4W_4=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1-i) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(-1+i) & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{4}}{2}(1+i) & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2}(-1-i) & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

上の D_j ($j=1, 2, 3, 4$) に対して，

$$D_j=\begin{pmatrix} \cos(\theta_1^{(j)})+i\sin(\theta_1^{(j)}) & & & \\ & \cos(\theta_2^{(j)})+i\sin(\theta_2^{(j)}) & & \\ & & \cos(\theta_3^{(j)})+i\sin(\theta_3^{(j)}) & \\ & & & \cos(\theta_4^{(j)})+i\sin(\theta_4^{(j)}) \end{pmatrix}$$

とおくと，

D_1 では　$\theta_1^{(1)}=\theta_3^{(1)}=0$，$\theta_4^{(1)}=\theta_2^{(1)}-\pi$，$\theta_2^{(1)}=\frac{5}{4}\pi$,

D_2 では　$\theta_2^{(2)}=\theta_4^{(2)}=0$，$\theta_3^{(2)}=\theta_1^{(2)}+\pi$，$\theta_1^{(2)}=\frac{3}{4}\pi$,

D_3 では　$\theta_1^{(3)}=\theta_3^{(3)}=0$，$\theta_4^{(3)}=\theta_2^{(3)}+\pi$，$\theta_2^{(3)}=\frac{3}{4}\pi$,

D_4 では　$\theta_2^{(4)}=\theta_4^{(4)}=0$，$\theta_3^{(4)}=\theta_1^{(4)}-\pi$，$\theta_1^{(4)}=\frac{5}{4}\pi$

となっている。

位数４の単位行列 I, W_4, D_jW_4 ($j=1, 2, 3, 4$) の各列ベクトルは，３つ

の mutually unbiased basis をつくることが確かめられる。しかし，任意の $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対して，$D_i W_4$ と $D_i W_4$ は mutually unbiased basis にならないことは，コンピュータを使って容易に確認できる。

我々は，［３］で与えられる対角行列 D_j がどの程程強いものなのか？または，［３］で構成される方法以外に，スピンモデルから構成できる mutually unbiased basis は存在しないのか？　という疑問が出てくる。その為に，我々は研究の最初のステップとして位数の小さな有限巡回群上のスピンモデルから出発する。

4　Godsil と Roy の結果の位数４における再構築

この節では，$I, W_4, A_1 = D_1 W_4$ の３つの行列の各列ベクトルが，mutually unbiased basis になるための必要十分条件を求める。更に，４点における Godsil-Roy の定理3.1の一般化を示す。

D_1 を次の形で与えられる対角行列とする：

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1) & & & \\ & \cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2) & & \\ & & \cos(\theta_3) + i\sin(\theta_3) & \\ & & & \cos(\theta_4) + i\sin(\theta_4) \end{pmatrix}$$

但し，$\theta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ は，$0 \leq \theta_i < 2\pi$ とおく。$A_1 = D_1 W_4$ とおく。A_1 と W_4 の列ベクトルを各々，

$$A_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4), \qquad W_4 = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

とおく。

数式処理システム Maple 10.03 を使うと，$i, j \in \{1, 2, 3, 4\} (i \neq j)$ に対して，a_i と w_j のノルム $|\langle a_i, w_j \rangle|$ は

$$|\langle a_i, w_j \rangle = \begin{cases} |S|, \\ \dfrac{1}{4}|T| \end{cases}$$

という２つの形に分かれる。S, T はある複素数である。

$|\langle a_i\, w_j\rangle|=|S|$ という形で表される成分は，$(i, j)=(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)$ である。$|\langle a_i, w_j\rangle|=\frac{1}{4}|T|$ という形で表される成分は，$(i, j)=(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)$ である。$(i, j)=(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)$ の８つの式は，

$$(1, 2)=(2, 3)=(3, 4)=(4, 1)$$
$$(1, 4)=(2, 1)=(3, 2)=(4, 3)$$

となる。ここで，

$$(1, 2)=\frac{1}{4}\Big|\cos(\theta_1)+\sin(\theta_2)-\cos(\theta_3)-\sin(\theta_4)$$
$$+i\big(\sin(\theta_1)-\cos(\theta_2)-\sin(\theta_3)+\cos(\theta_4)\big)\Big|,$$
$$(1, 4)=\frac{1}{4}\Big|\cos(\theta_1)-\sin(\theta_2)-\cos(\theta_3)-\sin(\theta_4)$$
$$+i\big(\sin(\theta_1)-\cos(\theta_2)-\sin(\theta_3)+\cos(\theta_4)\big)\Big|$$

従って，$(i, j)=(1, 2), (1\ 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)$ の８つの式は，$|\ |$ の中身の式のノルムの２剰を計算することにより，次の式を満たせば同値になる：

$$\cos(\theta_2)\sin(\theta_1)-\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)-\sin(\theta_1)\cos(\theta_4)$$
$$+\cos(\theta_4)\sin(\theta_3)-\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)+\cos(\theta_1)\sin(\theta_4)$$
$$+\sin(\theta_2)\cos(\theta_3)-\cos(\theta_3)\sin(\theta_4)$$
$$=2\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)\right)=0.$$

従って，次の式が成り立てばよい：

$$\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)\right.$$

$$-\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)\Bigg)=0. \qquad (2)$$

$(i, j)=(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)$ の場合の４つの式はすべて等しく，次の式で表される：

$$|S|=\frac{1}{4}\Big|\cos(\theta_1)+\sin(\theta_2)-\cos(\theta_3)-\sin(\theta_4)$$
$$+i\big(\sin(\theta_1)-\cos(\theta_2)-\sin(\theta_3)+\cos(\theta_4)\big)\Big|.$$

W_4 と A_1 の列ベクトルが mutually unbiased basis の条件を満たすためには，$|S|=\frac{1}{4}|T|$ を満たせばよい。S と T のノルムの２剰を計算することにより，次の式を得る：

$$\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)+\sin(\theta_1)\sin(\theta_4)+\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)+\sin(\theta_3)\sin(\theta_4)$$
$$+\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+\cos(\theta_1)\cos(\theta_4)+\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)$$
$$+\cos(\theta_3)\cos(\theta_4)-\cos(\theta_2)\sin(\theta_1)+\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)$$
$$+\sin(\theta_1)\cos(\theta_4)-\cos(\theta_4)\sin(\theta_3)+\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$$
$$-\cos(\theta_1)\sin(\theta_4)-\sin(\theta_2)\cos(\theta_3)+\cos(\theta_3)\sin(\theta_4)$$
$$-2\cos(\theta_2)\cos(\theta_4)-2\sin(\theta_1)\sin(\theta_3)-2\cos(\theta_1)\cos(\theta_3)$$
$$-2\sin(\theta_2)\sin(\theta_4)$$
$$=-4\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)$$
$$+2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)\right)+2\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)$$
$$\left(\cos+\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)\right)=0.$$

次の式が成り立てばよい：

$$-2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)$$

$$+\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)\right)+\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)$$

$$\left(\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)\right)=0. \qquad (3)$$

以上の計算から次の結果を得る：

命題4.1． I, W_4, $A_1=D_1W_4$ の３つの行列の各列ベクトルが mutually unbiased basis になるための必要十分条件は，（２）と（３）を満たす $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ が存在することである。

命題4.1を満たす$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ の値の可能性について考察する。

系4.2．（２）より，少なくとも次の（i），(ii) が成り立つ：

（i） $\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=0,$

(ii) $\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right).$

系4.3． 系4.2で，(ii) が成り立つとする。このとき，

$\theta_1=\theta_3$ または $\theta_2=\theta_4$

を得る。

Proof.

$$\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)$$

は加法定理を使って展開すると，$\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)=0$ となる。従って，$\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\right)=0$ または $\sin\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)=0$ が成り立つ。$-\pi<\frac{\theta_i-\theta_j}{2}<\pi$ より，前者が成り立つなら $\theta_1=\theta_3$ となり，後者が成り立つなら $\theta_2=\theta_4$ となる。

系4.4. 系4.3で，$\theta_1=\theta_3$ が成り立つとする。このとき，次の（i），(ii）のどちらか１つが成り立つ：

（i）　$\theta_4=\theta_2+\pi,$

（ii）　$A_1\sim W_4.$

Proof.（３）に $\theta_1=\theta_3$ を代入すると，

$$\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)-\cos\left(\frac{2\theta_1-\theta_2-\theta_4}{2}\right)\right)=0$$

となる。最初に，$\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\theta_1-\theta_2-\theta_4}{2}\right)$ が成り立つとする。ある整数 α に対して，$\frac{\theta_2-\theta_4}{2}=\frac{2\theta_1-\theta_2-\theta_4}{2}+2\pi\alpha$ である。$\theta_2=\theta_1+2\pi\alpha$ を得る。θ_1 と θ_2 の差が 2π の整数倍なので，これらの値は同一視できる。すなわち，$\theta_1=\theta_2$ を得る。従って，$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4$ となり，$W_4\sim A_1$ となる。

次に，$\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_4}{2}\right)=0$ が成り立つとする。$-\pi<\frac{\theta_2-\theta_4}{2}<\pi$ より，$\frac{\theta_2-\theta_4}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$ となり，$\theta_4=\theta_2\pm\pi$ となる。$\pm\pi$ の差は本質的に同一視できるので，$\theta_4=\theta_2+\pi$ としてよい。

系4.4の双対的な結果として，次を得る：

系4.5. 系4.3で，$\theta_2=\theta_4$ が成り立つとする。このとき，次の（i），(ii）のどちらか１つが成り立つ：

（i）　$\theta_3=\theta_1+\pi,$

（ii）　$A_1\sim W_4.$

注意4.6. 系4.4と系4.5は，４点における Gosil-Roy の定理3.1の一般化である。

命題4.7. 系4.2で，（i）が成り立つとする。このとき，$\theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3$ で

$$\theta_2-\theta_3=\arccos\left(\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1}\right) \tag{4}$$

を得る。特に，$\theta_1-\theta_2, \theta_2-\theta_3$ は

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq\theta_1-\theta_2,\ \theta_2-\theta_3\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

である。

Proof. $\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=0$ なら，$\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=\pm 1$ である。$-2\pi<\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}<2\pi$より，$\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=1$ となるのは，$\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}=0$ ときに限る。$\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=-1$ となるのは，$\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}=\pm\pi$ のときに限る。前者が成り立つなら，$\theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3$ である。後者が成り立つなら，$\theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3\pm 2\pi$ である。これらの値は，$\pm 2\pi$ の周期の差であるから同一視できる。$\theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3$ としてよい。これにより，$\cos\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}=1$ としてよい。

(3)に $\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)=1$（このとき $\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=0$）と $\theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3$ を代入すると，

$$\cos(\theta_2-\theta_3)(2\cos(\theta_1-\theta_2)-1=\cos(\theta_1-\theta_2),$$

$$\cos(\theta_2-\theta_3)=\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1}$$

を得る。この式で，$2\cos(\theta_1-\theta_2)-1=0$ となることはない。

$\cos(\theta_2-\theta_3)=\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1}$ のグラフは，$-\pi\leq\theta_1-\theta_2\leq\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ の範囲で次の通りである[1]:（横軸は $\cos(\theta_1-\theta_2)$ の値で，縦軸は $\cos(\theta_2-\theta_3)$ の値である。）

図1

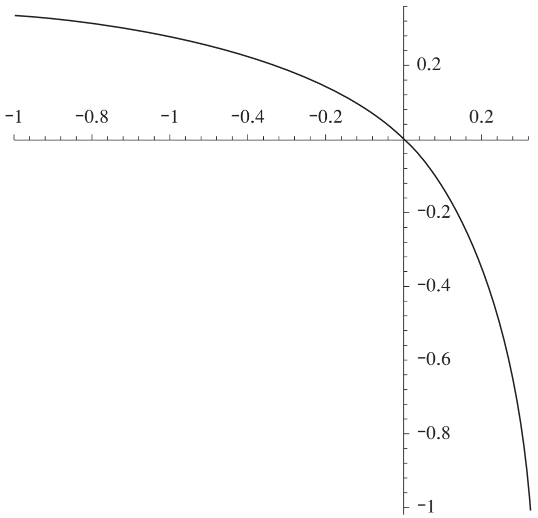


図1より，$\theta_1-\theta_2$ は $-\pi$ を起点として時計回りに $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ まで動く領域と，$-\pi$ を起点として反時計回りに $2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ まで動く領域の2通りあることがわかる。

$-1\leq\cos(\theta_1-\theta_2), \cos(\theta_2-\theta_3)\leq\frac{1}{3}$ である。これより，$\theta_1-\theta_2$ と $\theta_2-\theta_3$ の領域は，

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq\theta_1-\theta_2,\ \theta_2-\theta_3\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

である。また，

$$\theta_2-\theta_3=\arccos\left(\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1}\right)$$

（1）　このグラフには載せていないが，$\cos(\theta_1-\theta_2)=1$ のとき，$\cos(\theta_2-\theta_3)=1$ を取る。このとき，$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\theta_4$ となり自明な場合に帰着するので無視する。

を満たす解 $\theta_1-\theta_2$ と $\theta_2-\theta_3$ が存在することは図１より明らかである。

注意4.8. 命題4.7は，４点における Godsil-Roy の定理3.1に現れていない新しい結果である。

5　位数４の巡回群 $\mathbb{Z}_4$ 上のスピンモデルから構成される４つの mutually unbiased basis の構成

D_1 と D_2 を次の形で与えられる対角行列とする：$(i^2=-1)$

$$D_1=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1) & & & \\ & \cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2) & & \\ & & \cos(\theta_3)+i\sin(\theta_3) & \\ & & & \cos(\theta_4)+i\sin(\theta_4)\end{pmatrix}$$

$$D_2=\begin{pmatrix}\cos(\phi_1)+i\sin(\phi_1) & & & \\ & \cos(\phi_2)+i\sin(\phi_2) & & \\ & & \cos(\phi_3)+i\sin(\phi_3) & \\ & & & \cos(\phi_4)+i\sin(\phi_4)\end{pmatrix}$$

但し，$\theta_j, \phi_j\,(j=1,2,3,4)$ は，$0\leq\theta_j, \phi_j<2\pi$ とおく。

$A_1=D_1W_4$, $A_2=D_2W_4$ とおく。A_1 と A_2 の列ベクトルを各々

$$A_1=(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}),\quad A_2=(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, a_4^{(2)})$$

とおく。列ベクトル $a_i^{(1)}$ と $a_j^{(2)}$ $(i, j=1,2,3,4)$ に対するノルムを計算する。数式処理システム Maple 10.03 を使うと，$i, j\in\{1,2,3,4\}\,(i\neq j)$ に対して，$a_i^{(1)}$ と $a_j^{(2)}$ のノルム $|\langle a_j^{(1)}, a_j^{(2)}\rangle|$ は

$$|\langle a_j^{(1)}, a_j^{(2)}\rangle|=\begin{cases}|S|,\\ \dfrac{1}{4}|T|\end{cases}$$

という２つの形に分かれる。S, T はある複素数である。

$|\langle a_j^{(1)}, a_j^{(2)}\rangle|=|S|$ という形で表される成分は，$(i,j)=(1,3)$, $(2,4)$, $(3,1)$, $(4,2)$ である。$|\langle a_j^{(1)}, a_j^{(2)}\rangle|=\dfrac{1}{4}|T|$ という形で表される成分は，

$(i, j)=(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)$ である。

$(i, j)=(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)$ の８つの式は，

$$
\begin{aligned}
&(1, 2)=(2, 3)=(3, 4)=(4, 1),\\
&(1, 4)=(3, 2),\\
&(2, 1)=(4, 3).
\end{aligned}
$$

となっている。ここで，

$$
\begin{aligned}
(1, 2)=\frac{1}{4}\Big|&\cos(\theta_1-\phi_1)+\sin(\theta_2-\phi_2)-\cos(\theta_3-\phi_3)-\sin(\theta_4-\phi_4)\\
&+i(\sin(\theta_1-\phi_1)-\cos(\theta_2-\phi_2)-\sin(\theta_3-\phi_3)+\cos(\theta_4-\phi_4)\Big|,\\
(1, 4)=\frac{1}{4}\Big|&-\sin(\theta_1-\phi_1)-\cos(\theta_2-\phi_2)+\sin(\theta_3-\phi_3)+\cos(\theta_4-\phi_4)\\
&+i(\sin(\theta_1-\phi_1)+\cos(\theta_2-\phi_2)-\sin(\theta_3-\phi_3)-\cos(\theta_4-\phi_4)\Big|,\\
(2, 1)=\frac{1}{4}\Big|&\cos(\theta_1-\phi_1)-\sin(\theta_2-\phi_2)-\cos(\theta_3-\phi_3)+\sin(\theta_4-\phi_4)\\
&+i(\sin(\theta_1-\phi_1)+\cos(\theta_2-\phi_2)-\sin(\theta_3-\phi_3)-\cos(\theta_4-\phi_4)\Big|
\end{aligned}
$$

である。(1, 4) と (2, 1) のノルムの２剰を計算すると等しい。従って，(1, 2) と (1, 4) のノルムの２剰が等しければ，８つの式は同値になる。計算すると次を得る：

$$
\begin{aligned}
&\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\big(\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)-\cos(\phi_2)\sin(\phi_2)\big)\\
&+\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)\big(\sin(\phi_2)\cos(\phi_3)-\cos(\phi_2)\sin(\phi_3)\big)\\
&+\cos(\theta_3)\cos(\theta_4)\big(\sin(\phi_3)\cos(\phi_4)-\cos(\phi_3)\sin(\phi_4)\big)\\
&+\cos(\theta_4)\cos(\theta_1)\big(\sin(\phi_4)\cos(\phi_1)-\cos(\phi_4)\sin(\phi_1)\big)\\
&+\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\big(\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)-\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\big)\\
&+\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\big(\sin(\phi_2)\cos(\phi_3)-\cos(\phi_2)\sin(\phi_3)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sin(\theta_3)\sin(\theta_4)\big(\sin(\phi_3)\cos(\phi_4)-\cos(\phi_3)\sin(\phi_4)\big)\\
&+\sin(\theta_4)\sin(\theta_1)\big(\sin(\phi_4)\cos(\phi_1)-\cos(\phi_4)\sin(\phi_1)\big)\\
&+\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)\big(-\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)-\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\big)\\
&+\sin(\theta_2)\cos(\theta_3)\big(-\cos(\phi_2)\cos(\phi_3)-\sin(\phi_2)\sin(\phi_3)\big)\\
&+\sin(\theta_3)\cos(\theta_4)\big(-\cos(\phi_3)\cos(\phi_4)-\sin(\phi_3)\sin(\phi_4)\big)\\
&+\sin(\theta_4)\cos(\theta_1)\big(-\cos(\phi_4)\cos(\phi_1)-\sin(\phi_4)\sin(\phi_1)\big)\\
&+\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)+\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\big)\\
&+\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)\big(\cos(\phi_2)\cos(\phi_3)+\sin(\phi_2)\sin(\phi_3)\big)\\
&+\cos(\theta_3)\cos(\theta_4)\big(\cos(\phi_3)\cos(\phi_4)-\sin(\phi_3)\sin(\phi_4)\big)\\
&+\cos(\theta_4)\sin(\theta_1)\big(\cos(\phi_4)\cos(\phi_1)+\sin(\phi_4)\sin(\phi_1)\big)\\
&=2\sin\left(\frac{(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)-(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4)}{2}\right)\\
&\quad\cdot\left(\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)-(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4)}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\cos\left(\frac{(-\theta_1-\theta_2+\theta_3+\theta_4)-(-\phi_1-\phi_2+\phi_3+\phi_4)}{2}\right)\right)=0.
\end{aligned}
$$

従って，

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)-(\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4)}{2}\right)\\
&\quad\cdot\left(\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)-(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4)}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\cos\left(\frac{(-\theta_1-\theta_2+\theta_3+\theta_4)-(-\phi_1-\phi_2+\phi_3+\phi_4)}{2}\right)\right)=0. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

である。

$(i, j)=(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)$ の場合の 4 つの式はすべて等しく，次の式で与えられる：

$$|S|=\frac{1}{4}\Bigl|\cos(\theta_1-\phi_1)-\cos(\theta_2-\phi_2)+\cos(\theta_3-\phi_3)-\cos(\theta_4-\phi_4)$$
$$+i(\sin(\theta_1-\phi_1)-\sin(\theta_2-\phi_2)+\sin(\theta_3-\phi_3)-\sin(\theta_4-\phi_4)\Bigr|.$$

従って，A_1 と A_2 の列ベクトルが mutually unbiased basis の条件を満たすためには，$|S|=\frac{1}{4}|T|$ が成り立てばよい。S と T のノルムを２剰して計算すると次の式を得る：

$$\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)-(\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4)}{2}\right)$$
$$\cdot\left(\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)-(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4)}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)-(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}{2}\right)\right)$$
$$-2\cos\left(\frac{(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4)-(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)}{2}\right)$$
$$\cdot\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4)-(\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4)}{2}\right)=0. \tag{6}$$

以上の計算より，次を得る：

命題 5.1． ４つの行列 I, W_4, $A_1=D_1W_4$, $A_2=D_2\,W_4$ の各列ベクトルが mutually unbiased basis になるための必要十分条件は，（５）と（６）を満たす $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ と $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ が存在することである。

命題5.1を考えるにあたり $A_1=D_1W_4$ に対して，系4.4（または，系4.5）が成り立つが成り立つ場合と命題4.7が成り立つ場合の２通りに分けて考える必要がある。

（２）は $\theta_j(j=1, 2, 3, 4)$ を $\phi_j(j=1, 2, 3, 4)$ に置き換えても成り立つ。すなわち，

$$\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4}{2}\right)\right.$$

$$-\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4}{2}\right)\Bigg)=0. \tag{7}$$

5.1　$A_1=D_1W_4$ に対して系4.4または系4.5が成り立つ場合

$A_1=D_1W_4$ に対して 系4.2 (ii)：$\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2-\theta_3+\theta_4}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4}{2}\right)$ が成り立つとする。系4.3より，$\theta_3=\theta_1$ または $\theta_4=\theta_2$ である。これらはお互いに双対な関係にあるので，$\theta_3=\theta_1$ としてよい。系4.4より $\theta_4=\theta_2+\pi$ が成り立つ場合のみを考察すればよい。

この節では，次を証明する：

命題 5.2． $D_1=\mathrm{diag}[\cos(\theta_j)+i\sin(\theta_j)]_{1\leq j\leq 4}$ に対して，$\theta_3=\theta_1$, $\theta_4=\theta_2+\pi$ とする。I, W_4, $A_1=D_1W_4$, $A_2=D_2W_4$ の 4 つの行列の各列ベクトルが mutually unbiased basis になるとする。このとき，$A_2\sim A_1$ である。

Proof. (5)に $\theta_3=\theta_1$ と $\theta_4=\theta_2+\pi$ を代入すると，次を得る：

$$\cos\left(\theta_1-\theta_2-\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)\Bigg(\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4}{2}\right)$$
$$+\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4}{2}\right)\Bigg)=0. \tag{8}$$

(6)に $\theta_3=\theta_1$ と $\theta_4=\theta_2+\pi$ を代入すると，次を得る：

$$\sin\left(\theta_1-\theta_2-\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)\Bigg(\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4}{2}\right)$$
$$-\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4}{2}\right)\Bigg)$$
$$+2\sin\left(\frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)0. \tag{9}$$

以下で，(7)を基準に $\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)=0$ の場合と $\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right.$

$-\phi_3+\phi_4}{2}\Big)=\cos\Big(\frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4}{2}\Big)$ の場合の２つに分けて考察する。

5.1.1　$\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4}{2}\right)=\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4}{2}\right)$ が成り立つ場合。

（７）で $\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2-\phi_3+\phi_4}{2}\right)=\cos\left(\frac{\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4}{2}\right)$ が成り立つなら，系4.3の双対性より，

$$\phi_1=\phi_3 \quad \text{または} \quad \phi_2=\phi_4$$

である。系4.4系4.5の双対性より，

$$\phi_3=\phi_1,\ \phi_4=\phi_2+\pi \quad \text{または} \quad \phi_4=\phi_2,\ \phi_3=\phi_1+\pi$$

が成り立つ。

$\phi_3=\phi_1,\ \phi_4=\phi_2+\pi$ の場合と $\phi_4=\phi_2,\ \phi_3=\phi_1+\pi$ の場合に分けて考える。

Case 1．$\phi_1=\phi_3,\ \phi_4=\phi_2+\pi$ が成り立つとする。このとき，（８）は自動的に成り立つ。（９）は

$$\cos(\theta_1-\theta_2-(\phi_1-\phi_2))=1$$

となる。これより，$\theta_1-\theta_2-(\phi_1-\phi_2)=0$ としてよい。ある $\alpha(0\leq\alpha<2\pi)$ に対して $\cos(\phi_2)=\cos(\theta_2+\alpha)$ が成り立つので，$A_2\sim A_1$ となる。

Case 2．$\phi_2=\phi_4,\ \phi_3=\phi_1+\pi$ のとき，（８）は自動的に成り立つ。（９）は $1=0$ となり矛盾である。従って，この場合は起こらない。

5.1.2　$\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3+\phi_4}{2}\right)=0$ が成り立つ場合。

（７）で$\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3+\phi_4}{2}\right)=0$ が成り立つなら，命題4.7の双対性より $\phi_4=\phi_1-\phi_2+\phi_3$ である。更に，

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2,\ \phi_2-\phi_3\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \tag{10}$$

の範囲で

$$\phi_2-\phi_3=\arccos\left(\frac{\cos(\phi_1-\phi_2)}{2\cos(\phi_1-\phi_2)-1}\right) \tag{11}$$

が成り立つ。

（8）に $\phi_4=\phi_1-\phi_2+\phi_3$ を代入すると，次の式を得る：

$$\cos(\theta_1-\theta_2)(\sin(\phi_1-\phi_2)+\sin(\phi_2-\phi_3))=0. \tag{12}$$

（9）に $\phi_4=\phi_1-\phi_2+\phi_3$ を代入すると，次の式を得る：

$$\sin(\theta_1-\theta_2)(\sin(\phi_1-\phi_2)-\sin(\phi_2-\phi_3)) \\ +2\sin(\phi_2-\phi_3)\sin(\phi_1-\phi_2)=0. \tag{13}$$

(12) より $\sin(\phi_1-\phi_2)+\sin(\phi_2-\phi_3)=0$ の場合と $\cos(\theta_1-\theta_2)=0$ の場合に分けて考える。

Case 3. (12)で $\sin(\phi_1-\phi_2)+\sin(\phi_2-\phi_3)=0$ が成り立つなら，三角関数における和積の公式を用いると，

$$\sin(\phi_1-\phi_2)+\sin(\phi_2-\phi_3)=2\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_3}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_1-2\phi_2+\phi_3}{2}\right)=0$$

となる。$\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_3}{2}\right)=0$ なら，$\frac{\phi_1-\phi_3}{2}=0$ または $\frac{\phi_1-\phi_3}{2}=\pi$ となるので，

$$\phi_3=\phi_1$$

としてよい。$\cos\left(\frac{\phi_1-2\phi_2+\phi_3}{2}\right)=0$ なら，$\frac{\phi_1-2\phi_2+\phi_3}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$ となるので，

$$\phi_3=-\phi_1+2\phi_2+\pi$$

としてよい。

Case. 3-1. $\phi_3=\phi_1$ なら，(11)より

$$\cos(\phi_1-\phi_2)(\cos(\phi_1-\phi_2)-1)=0$$

となる。$\cos(\phi_1-\phi_2)=0$ なら $\phi_1-\phi_2=\pm\frac{\pi}{2}$ である。$\phi_2=\phi_1\pm\frac{\pi}{2}$ である。このとき，$\phi_4=\phi_1-\phi_2+\phi_3=\phi_2$ となる。系4.5の双対性より，$A_2\sim$

A_1 となる。

　$\cos(\phi_1-\phi_2)=1$ なら $\phi_2=\phi_1$ である。このとき，$\phi_4=\phi_3=\phi_2=\phi_1$ となるので，系4.5の双対性より，$A_2\sim A_1$ となる。

Case. 3. 2. $\phi_3=-\phi_1+2\phi_2+\pi$ なら，(11)より$(\cos(\phi_1-\phi_2))^2=0$ を得る。すなわち，$\phi_1-\phi_2=\pm\dfrac{\pi}{2}$ である。このとき，$\phi_4=\phi_1-\phi_2+\phi_3=\phi_2$ となる。系4.5の双対性より，$A_2\sim A_1$ となる。

Case 4. (12)で $\cos(\theta_1-\theta_2)=0$ が成り立つなら，$\sin(\theta_1-\theta_2)\pm1$ である。

Case. 4-1. $\sin(\theta_1-\theta_2)=1$ なら，(13) より

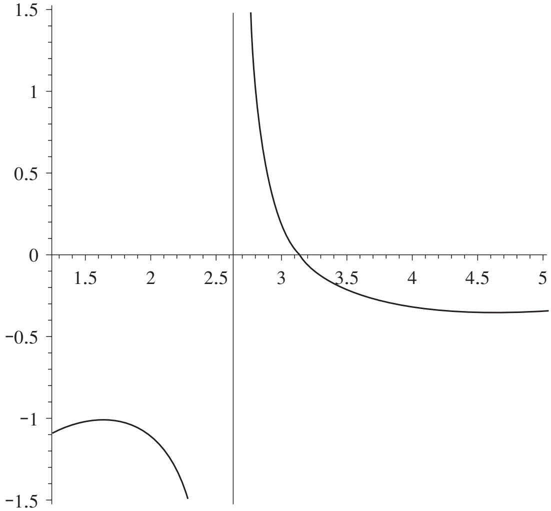
$$\sin(\phi_2-\phi_3)=-\frac{\sin(\phi_1-\phi_2)}{2\sin(\phi_1-\phi_2)-1}$$

となる。$2\sin(\phi_1-\phi_2)\neq1$ より(10)と合わせると，$\phi_1-\phi_2\neq\dfrac{5}{6}\pi$ である。$\phi_1-\phi_2$ は元々 $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2\leq2\pi-\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ なので，$\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2<\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi<\phi_1-\phi_2\leq2\pi-\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の範囲で考えなければならない。

　(10)より$\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2\leq2\pi-\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の範囲で，$\sin(\phi_2-\phi_3)=-\dfrac{\sin(\phi_1-\phi_2)}{2\sin(\phi_1-\phi_2)-1}$ のグラフを描くと次のようになる:(横軸は $\sin(\phi_1-\phi_2)$ の値であり，縦軸は $\sin(\phi_2-\phi_3)$ の値である。)

　図2より $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2<\dfrac{5}{6}\pi$ の範囲では，$\sin(\phi_2-\phi_3)\leq-1$ である。$\sin(\phi_2-\phi_3)=-1$ となるのは，$\phi_1-\phi_2=\dfrac{\pi}{2}$ のときのみである。このとき，$\phi_2-\phi_3=\dfrac{\pi}{2}$ である。従って，$\phi_1=\phi_3=\phi_2+\dfrac{\pi}{2},\ \phi_4=$

図2



$\phi_2+\dfrac{\pi}{2}$ となる。このとき，系4.5の双対性より $A_2\sim A_1$ となる。

次に，$\dfrac{5}{6}\pi<\phi_1-\phi_2\leq 2\pi-\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の範囲を考える。$\sin(\phi_2-\phi_3)=-\dfrac{\sin(\phi_1-\phi_2)}{2\sin(\phi_1-\phi_2)-1}\leq 1$ を満たす $\phi_1-\phi_2$ の範囲は $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2$ である。従って，$\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2\leq 2\pi-\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の範囲で考えればよい。

$$\phi_2-\phi_3=-\arcsin\left(\frac{\sin(\phi_1-\phi_2)}{2\sin(\phi_1-\phi_2)-1}\right)$$

より，

$$\cos(\phi_2-\phi_3)=\sqrt{1-\frac{\sin(\phi_1-\phi_2)^2}{(2\sin(\phi_1-\phi_2)-1)^2}}$$

となる。(11)と合わせて $\cos(\phi_1-\phi_2)$ について解くと，

$$\cos(\phi_1-\phi_2)=\frac{\sqrt{\dfrac{(3\sin(\phi_1-\phi_2)-1)(\sin(\phi_1-\phi_2)-1)}{(2\sin(\phi_1-\phi_2)-1)^2}}}{-1+2\sqrt{\dfrac{3\sin(\phi_1-\phi_2)-1)(\sin(\phi_1-\phi_2)-1)}{(2\sin(\phi_1-\phi_2)-1)^2}}} \qquad (14)$$

となる。(14)のグラフは，$\frac{5}{6}\pi<\phi_1-\phi_2\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ の範囲で次の通りである：(横軸は $\phi_1-\phi_2$ であり，縦軸は $\cos(\phi_1-\phi_2)$ の値である。)

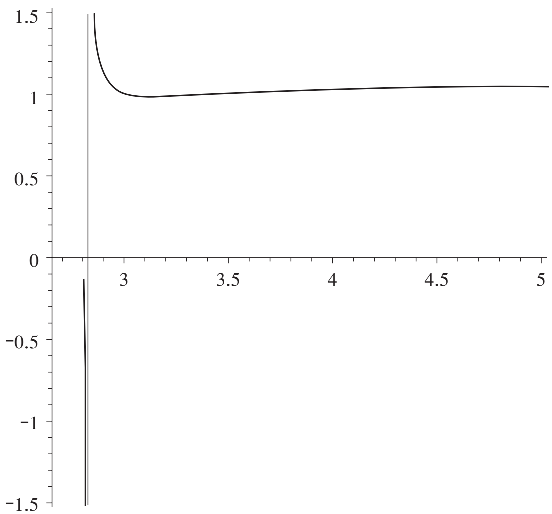
(14)の右辺を $f(\phi_1-\phi_2)$ とおく。図3より $f(\phi_1-\phi_2)=1$ となるのは $\phi_1-\phi_2=\pi$ のときである。ところが，左辺の $\cos(\phi_1-\phi_2)$ は $\cos(\phi_1-\phi)$ $=\cos(\pi)=-1$ である。これは矛盾である。従って，この場合は起こらない。

Case. 4. 2.　$\sin(\theta_1-\theta_2)=-1$ なら，(13)より

$$\sin(\phi_2-\phi_3)=\frac{\sin(\phi_1-\phi_2)}{2\sin(\phi_1-\phi_2)+1}$$

となる。$2\sin(\phi_1-\phi_2)+1\neq 0$ より $\phi_1-\phi_2\neq\frac{7}{6}\pi$ である。従って，

図3



$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \leq \phi_1 - \phi_2 < \frac{7}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi < \phi_1 - \phi_2 \leq 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

の範囲で考えればよい。$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \leq \phi_1 - \phi_2 < \frac{7}{6}\pi$ なら，$\sin(\phi_2 - \phi_3) = \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{2\sin(\phi_1 - \phi_2) + 1}$ のグラフは次のようになる：(横軸は $\phi_1 - \phi_2$ であり，縦軸は $\sin(\phi_2 - \phi_3)$ の値である。)

図 4 では $\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) \leq \phi_1 - \phi_2 < \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ の範囲で考えればよい。このとき，

$$\phi_2 - \phi_3 = \arcsin\left(\frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)}{2\sin(\phi_1 - \phi_2) + 1}\right)$$

より，

$$\cos(\phi_2 - \phi_3) = \sqrt{1 - \frac{\sin(\phi_1 - \phi_2)^2}{(2\sin(\phi_1 - \phi_2) + 1)^2}}$$

となる。(10) と合わせて $\cos(\phi_1 - \phi_2)$ について解くと，

図 4

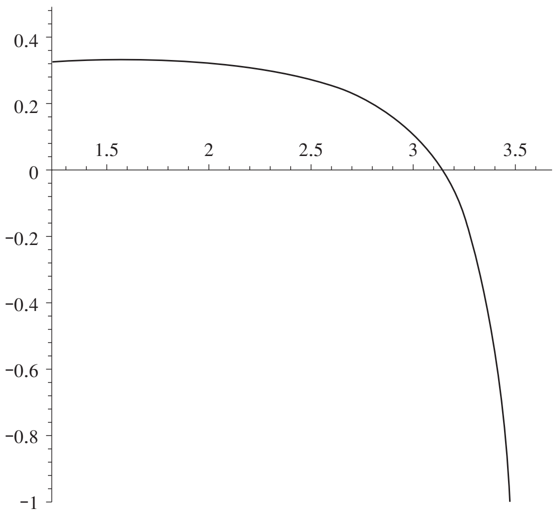
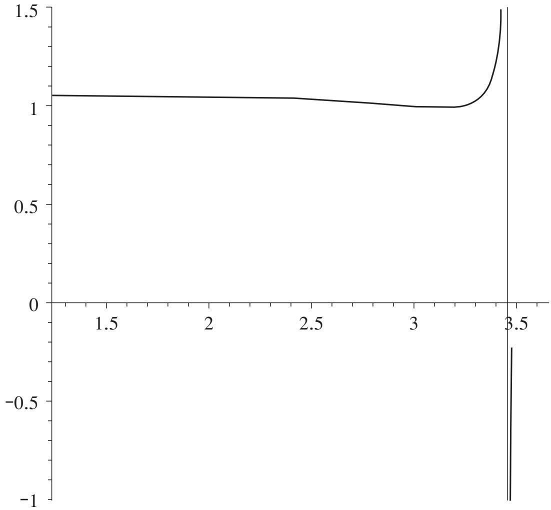


図5



$$\cos(\phi_1-\phi_2)=\frac{\sqrt{\frac{(\sin(\cos(\phi_1-\phi_2)+1)(3\sin(\cos(\phi_1-\phi_2))+1)}{(2\sin(\cos(\phi_1-\phi_2)+1)^2}}}{2\sqrt{\frac{(\sin(\cos(\phi_1-\phi_2))+1)(3\sin(\cos(\phi_1-\phi_2))+1)}{(2\sin(\cos(\phi_1-\phi_2))+1)^2}}-1}$$

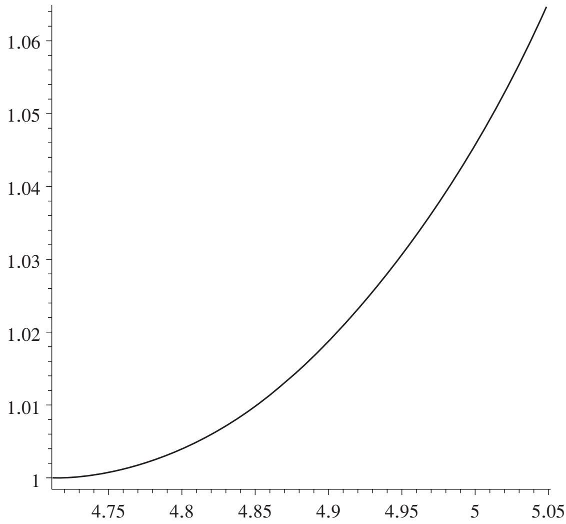
となる。この式で右辺を $f(\phi_1-\phi_2)$ とおく。$f(\phi_1-\phi_2)$ は $\cos(\phi_1-\phi_2)$ は $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq\phi_1-\phi_2<\frac{7}{6}\pi$ の範囲で計算すると，次のようになる：（横軸は $\phi_1-\phi_2$ であり，縦軸は $\cos(\phi_1-\phi_2)$ の値である。）

$f(\phi_1-\phi_2)=1$ となるのは，$\phi_1-\phi_2=\pi$ のときである。一方，$\cos(\phi_1-\phi_2)=\cos(\pi)=-1$ より矛盾である。従って，この場合は起こらない。

$\frac{7}{6}\pi<\phi_1-\phi_2\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ なら，$\sin(\phi_2-\phi_3)=\frac{\sin(\phi_1-\phi_2)}{2\sin(\phi_1-\phi_2)+1}$ のグラフは次のようになる：（横軸は $\phi_1-\phi_2$ であり，縦軸は $\sin(\phi_1-\phi_2)$ の値である。）

$\sin(\phi_2-\phi_3)=1$ となるのは，$\phi_1-\phi_2=\frac{3}{2}\pi$ のときである。$\phi_2=\phi_3$ よ

図 6



り，$\phi_1=\phi_4=\phi_2+\dfrac{3}{2}\pi$, $\phi_3=\phi_2$ となる。このとき，系4.5の双対性より，$A_2\sim A$ となる。

5.2 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{W}_4$ に対して命題4.7が成り立つ場合

$A_1=D_1W_4$ に対して 系4.2（i）: $\sin\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=0$ が成り立つなら，命題4.7より，$\theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3$ であって，

$$\theta_2-\theta_3=\arccos\left(\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1}\right)$$

が成り立つ。

この節では，定理1.1が成り立つことを証明する。

系4.3と（7）より，次の式が成り立つ：

$$\cos(\theta_2-\theta_3)=\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1},\ \theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3, \tag{15}$$

$$\cos(\phi_2-\phi_3)=\frac{\cos(\phi_1-\phi_2)}{2\cos(\phi_1-\phi_2)-1},\ \phi_4=\phi_1-\phi_2+\phi_3. \tag{16}$$

(15)，(16)より $(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)-(\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4)=0$ より，

$$\sin\left(\frac{(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)-(\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4)}{2}\right)=0$$

である。すなわち，(5)は(15)，(16)のもとで成り立っている。後は，(6)が成り立つ条件を探せばよい。

(6)の第1項の $\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)-(\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4)}{2}\right)$ に加法定理を適用すると，

$$\begin{aligned}&\cos\left(\frac{(\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4)-(\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4)}{2}\right)\\&=\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)\\&\quad+\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)\\&=(\pm1)\cdot(\pm1)+0.0\\&=\pm1\end{aligned}$$

となる。従って，この項は $+1$ と -1 の2通りの値を持つことが分かる。$0\leq\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}<2\pi$ より，$\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=\pm1$ となるのは，$\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}=0$ または $\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}=\pi$ のときに限る。すなわち，

$$\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4=0\quad\text{または}\quad2\pi$$

である。これらの値は，2π の周期の差を持つので同一視できる。従って，$\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4=0$ としてよい。$\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2+\theta_3-\theta_4}{2}\right)=1$ としてよい。同じ計算により $\cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2+\phi_3-\phi_4}{2}\right)=1$ としてよい。また，(6)

に $\theta_4=\theta_1-\theta_2+\theta_3$ と $\phi_4=\phi_1-\phi_2+\phi_3$ を代入すると，次の式を得る：

$$\cos((\theta_2-\theta_3)-(\phi_2-\phi_3))=\frac{\cos((\theta_1-\theta_2)-(\phi_1-\phi_2))}{2\cos((\theta_1-\theta_2)-(\phi_1-\phi_2))-1}.$$

以上より，次の結果を得る：

命題 5.3. $\theta_1-\theta_2$, $\phi_1-\phi_2$, $\theta_2-\theta_3$, $\phi_2-\phi_3$ が

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq(\theta_1-\theta_2)-(\phi_1-\phi_2),$$

$$(\theta_2-\theta_3)-(\phi_1-\phi_3)\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

であるとする。このとき，次の式が成り立つ：

$$\cos((\theta_2-\theta_3)-(\phi_2-\phi_3))=\frac{\cos((\theta_1-\theta_2)-(\phi_1-\phi_2))}{2\cos((\theta_1-\theta_2)-(\phi_1-\phi_2))-1}. \quad (17)$$

便宜上，

$$x_1=\theta_1-\theta_2,\ x_2=\phi_1-\phi_2,\ y_1=\theta_2-\theta_3,\ y_2=\phi_2-\phi_3$$

とおく。このとき，我々の問題 **Approach 2** は次の形に帰着できる：

Problem.

$$\cos(y_1)=\frac{\cos(x_1)}{2\cos(x_1)-1}, \quad (18)$$

$$\cos(y_2)=\frac{\cos(x_2)}{2\cos(x_2)-1}, \quad (19)$$

$$\cos(y_1-y_2)=\frac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1} \quad (20)$$

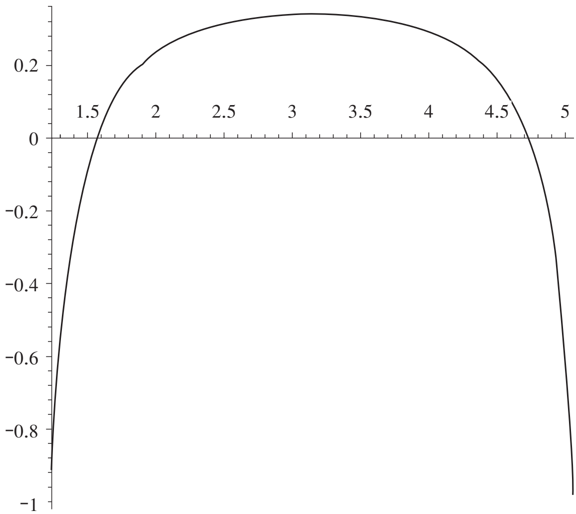
を同時に満たす x_1, x_2, y_1, y_2 が

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ x_1-x_2,\ y_1-y_2\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

の範囲で存在するか？

系 4．7 より $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_1-x_2\leq 2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ である。

図７



$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \sim 1.230959417$ より，$x_1 - x_2$ は約71度から289度の間にある。この範囲における $\frac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}$ のグラフは，次のようになる：(横軸は x_1-x_2 であり，縦軸は $\frac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}$ の値である。)

$\frac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}=0$ となる x_1-x_2 は，$x_1-x_2=\frac{\pi}{2}$ と $x_1-x_2=\frac{3}{2}\pi$ である。最大値は $x_1-x_2=\pi$ のとき $\frac{1}{3}$ をとる。

筆者は，特に x_1-x_2 が

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \leq x_1-x_2 \leq \frac{\pi}{2}$$

の場合を考察した。定理1.1はこの場合における，更にこの場合のある部分に制限した場合に得られた結果である。$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \leq x_1-x_2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)$ の条件を設定するまでの過程を述べる。

Step. 1. 命題4.7の証明より，x_1 は $-\pi$ を起点として時計回りに $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ まで動く領域と，$-\pi$ を起点として反時計回りに 2π $2\pi-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ まで動く領域の２通りある。そこで，x_1 が

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_1\leq\pi$$

を仮定する。

Step. 2. x_1 が $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_1\leq\frac{\pi}{2}$ に存在することはない。何故なら，$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_1-x_2$ を満たすためには，x_2 が相当小さくなければならない。しかし，$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_2$ なので，x_1 が $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_1\leq\frac{\pi}{2}$ に存在することはない。

Step. 3. x_1 が $\frac{\pi}{2}\leq x_1\leq\pi$ の範囲にあるとする。$x_1=\frac{\pi}{2}$ とする。このとき，$x_1-x_2=\frac{\pi}{2}-x_2\geq\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ であることを要求するので，$\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{3}\geq x_2$ でなければならない。一方，$x_2\geq\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ であるので，$\frac{\pi}{2}\geq 2\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ となるので，この場合は起こらない。

Step. 4. $x_1=\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ なら，

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\leq x_2\leq\frac{\pi}{2}$$

の範囲でよい。また，$x_1=\pi$ なら，

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \leq x_2 \leq \pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

の範囲でよい。

Step. 5.　以上より，$\dfrac{\pi}{2}+\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \leq x_1 \leq \pi$ を満たす x_1 が一つ与えられると，x_2 は $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \leq x_1 - x_2$ でよい。

今，$x_1=\dfrac{\pi}{2}+\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ とする。このとき，$\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \leq x_2 \leq \dfrac{\pi}{2}$ である。

(18)より，

$$\cos(y_1)=\frac{\cos(x_1)}{2\cos(x_1)-1}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\sim 0.3267268968$$

となる。つまり，

$$y_1=\begin{cases}\arccos\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right) & \text{（A）}\cdots 70\text{度と}71\text{度の間}, \\ -\arccos\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right) & \text{（B）}\cdots 289\text{度と}290\text{度の間}.\end{cases}$$

$x_2=\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ なら(19)より，$y_2=-1$ であるから

$$y_1=\pi$$

となる。$x_2=\dfrac{\pi}{2}$ なら(19)より，$y_2=0$ であるから

$$y_2=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{3}{2}\pi\end{cases}$$

となる。従って，x_2 が $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ から $\dfrac{\pi}{2}$ までこの順序で動くなら，それに対応して y_2 の動き方は２通りあって，

$$\begin{cases} \text{(C)}\ y_2 \text{は}\ \pi\ \text{から}\ \dfrac{\pi}{2}\ \text{まで時計回りに動く,} \\ \text{(D)}\ y_2\ \text{は}\ \pi\ \text{から}\ \dfrac{3}{2}\pi\ \text{まで反時計回りに動く。} \end{cases}$$

以上より，y_1 の値の取り方は 2 通りあり，y_2 の動き方は 2 通りある。従って，合計 4 通りの場合を考察しなければならない。ここでは y_1 に対して(A)が起こる場合を考える。このとき，

$$\text{(A)-(C)}: \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\pi \leq y_1-y_2 \leq \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\frac{\pi}{2},$$

$$\text{(A)-(D)}: \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\frac{3}{2}\pi \leq y_1-y_2 \leq \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\pi.$$

ここで，

$$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\pi=-2.282934507,$$

$$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\frac{\pi}{2}=-0.7121381797,$$

$$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\frac{3}{2}\pi=-3.853730834$$

より

(A)-(C): -110度～-109度$\leq y_1-y_2 \leq -19$度～-20度,

(A)-(D): -110度～-109度$\leq y_1-y_2 \leq -199$度～-200度

となる。

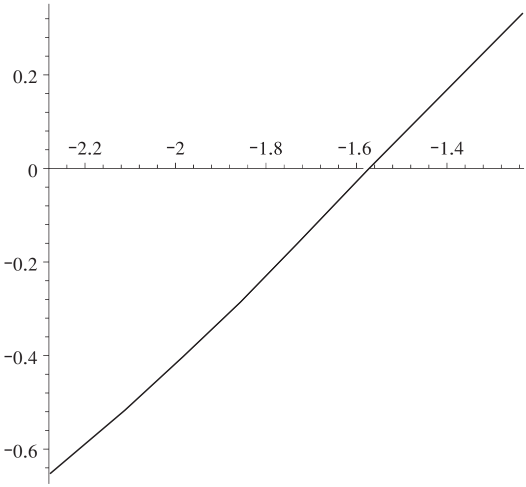
今，(A)-(C) の場合を考察する。$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\pi \geq -\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

より，(A)-(C) は

$$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\pi \leq y_1-y_2 \leq -\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

の範囲で考えればよい。この範囲で，$\cos(y_1-y_2)$ のグラフは次のようになる：(横軸は y_1-y_2 であり，縦軸は $\cos(y_1-y_2)$ の値である。)

図8



このグラフにおける数値を計算する。

(a)　$y_1-y_2=-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ を満たす x_2 を求めてみる。

$$y_2=y_1+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)=\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

より，(19)を満たす $\cos(x_2)$ は

$$\cos(x_2)=\frac{\cos\left(\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{2\cos\left(\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)-1}\sim 0.3050161664$$

であり，x_2 は

$$x_2=\arccos\left(\frac{\cos\left(\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{2\cos\left(\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)-1}\right)$$

となる。

(b)　$\cos(y_1-y_2)=0$ となる y_2 の値は，

$$y_2=\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\frac{\pi}{2}$$

である。(19)を満たす $\cos(x_2)$ は

$$\cos(x_2)=\frac{\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}{1+2\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}\sim 0.3270038415$$

であり，x_2 は

$$x_2=\arccos\left(\frac{\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}{1+2\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}\right)$$

となる。

(c)　$y_1-y_2=\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\pi$ のとき，$\cos(y_1-y_2)=-\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\sim$ -0.3267268968 である。

便宜上，

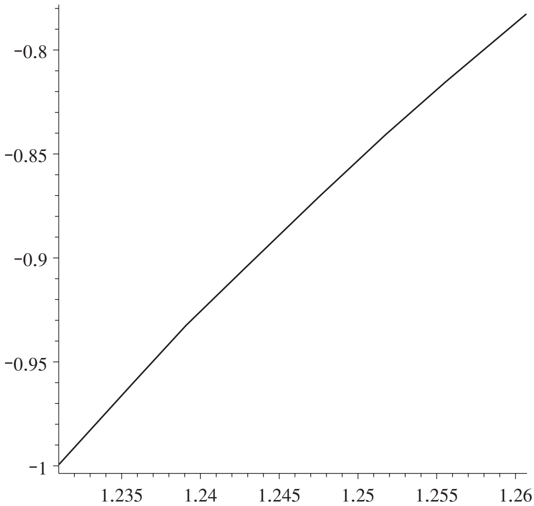
$$a=\arccos\left(\frac{\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}{1+2\sqrt{1-\frac{8}{(4\sqrt{2}+3)^2}}}\right),$$

$$b=\arccos\left(\frac{\cos\left(\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{2\cos\left(\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)-1}\right)$$

とおく。

x_2 は $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ から b まで動くが，このグラフで x_2 が $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ から b まで移動するに対応して，$\cos(y_1-y_2)$ は下から上へと移動する。

図9



$\dfrac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}$ のグラフは，x_2 が $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ から b まで動くとき，次のようになる：

x_2 は $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ から b まで動くが，このグラフで x_2 は $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ から b まで動くに対応して，$\dfrac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}$ は上から下へと移動する。

以上の数値計算をまとめると，次の表のようになる：

この表から，$\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)<x_2<a$ のとき，

$$-0.3267268968<\cos(y_1-y_2)<0,$$

$$-0.006796641394<\frac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}<0$$

であるから，$\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)<x_2<a$ のどこかある一つの点に対して，

$$\cos(y_1-y_2)=\frac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}$$

x_2	$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$	$\cdots$	a	$\cdots$	b
y_1-y_2	$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\right)-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$
$\csc(y_1-y_2)$	$\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}$ ~-0.3267268968	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
x_1-x_2	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-a$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-b$
$\frac{\cos(x_1-x_2)}{2\cos(x_1-x_2)-1}$	0	$\cdots$	$\frac{\sin(a)}{2\sin(a)-1}$ ~-0.006796641394	$\cdots$	$\frac{\sin(b)}{2\sin(b)-1}$ ~-0.03177579273

が成り立つ。これにより，定理1.1が証明できた。

6　定理1.1の値の評価

この節では，定理1.1の結果で得た $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ と $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ の配置がどのような状況になっているのかを考察し，$I, W_4, D_1 W_4, D_2 W_4$, が mutually unbiased basis である状況を解析する。

$x_1=\theta_1-\theta_2=\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ である。$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ は約70度と71度の間の角である。従って，$\theta_1-\theta_2$ は160度と161度の間にある。このとき，$y_1=\theta_2-\theta_3$ は $\cos(y_1)=\frac{\cos(x_1)}{2\cos(x_1)-1}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3}\sim0.3267268968$ より，約70度と71度の間の角である。$\theta_1, \theta_3, \theta_4$ を θ_2 を使って記述すると，

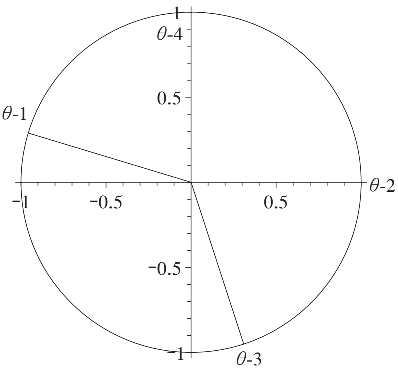
$\theta_1=\theta_2+x_1,$

$\theta_3=\theta_2-y_1,$

$\theta_4=\theta_2+x_1-y_1$

となる。$\theta_2=0$ とおいたとき，これらの値を plot すると次の図ようになる：

$x_2=\phi_1-\phi_2$ は $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ と a の間にある。$\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)=$



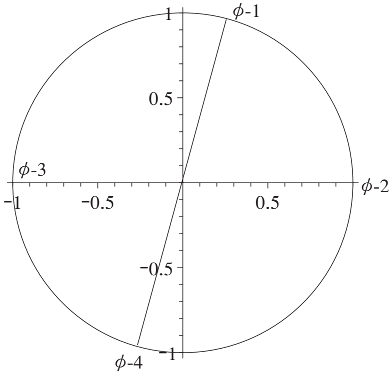
0.33333, $\cos(a)=0.327003845$ より，この2つの値の差は角度でいうと１度もない。注意すべきことは，求める解 $x_2=\phi_1-\phi_2$ はこの区間の両端ではなく，丁度この間にあることである。従って，$\phi_1-\phi_2$ は約70度と71度の間の角である。

仮に，計算の都合上，$x_2=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ とすると，$\cos(y_2)=\frac{\cos(x_2)}{2\cos(x_2)-1}=-1$ より $y_2=\pi$ となる。ϕ_1, ϕ_3, ϕ_4 を ϕ_2 を使って記述すると，

$$\phi_1=\phi_2+x_2,$$
$$\phi_3=\phi_2-\pi,$$
$$\phi_4=\phi_2+x_2-\pi$$

となる。$\phi_2=0$ とおいたとき，この値を plot すると次の図ようになる：

$x_2=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, $\theta_2=0$, $\phi_2=0$ とおいたとき，D_1W_4 と D_2W_4 が $D_1W_4\sim D_2W_4$ であるかどうかを調べてみる。$D_1W_4(i, j)$ を $D_1W_4(2, j)$ で割った行列を C_1 とする。$D_2W_4(i, j)$ を $D_2W_4(2, j)$ で割った行列を C_2 とする。C_1, C_2 は次のようになる：



$$C_1=\begin{pmatrix} \dfrac{4-\sqrt{2}-(4+\sqrt{2})i}{6} & \dfrac{-4-\sqrt{2}+(-4+\sqrt{2})i}{6} & \dfrac{-4+\sqrt{2}+(4+\sqrt{2})i}{6} & \dfrac{4+\sqrt{2}+(4-\sqrt{2})i}{6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4372691042+0.8993307130i & -0.8993307127+0.4372691047i & -0.4372691042-0.8993307130i & 0.8993307127-0.4372691047i \\ -0.0069985254-0.9999755096i & 0.0069985254+0.9999755096i & -0.0069985254-0.9999755096i & 0.0069985254+0.9999755096i \end{pmatrix},$$

$$C_2=\left(\begin{matrix} \dfrac{-4-\sqrt{2}+(-4+\sqrt{2})i}{6} & \dfrac{-4+\sqrt{2}+(4+\sqrt{2})i}{6} \\ 1 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+i) \\ \dfrac{1+2\sqrt{2}\,i}{3} & -\dfrac{1+2\sqrt{2}\,i}{6} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{4+\sqrt{2}+(4-\sqrt{2})i}{6} & \dfrac{4-\sqrt{2}-(4+\sqrt{2})i}{6} \\ 1 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+i) \\ \dfrac{1+2\sqrt{2}\,i}{3} & -\dfrac{1+2\sqrt{2}\,i}{6} \end{matrix}\right).$$

C_1 とC_2 の２行目は一致している。また，C_1 の１行目の成分の集合と C_2 の１行目の成分の集合は一致している。

最初に C_1 の第１列ベクトルが C_2 の４つの列ベクトルのどれかのスカラー倍になっているかどうかを調べる。C_2 の第１行の配置を見てみると，C_1 の第１列ベクトルのスカラー倍になっている可能性があるのは，C_2 の第４列ベクトルである。このとき，

$$C_1(1, 1)=C_2(1, 4),$$
$$C_1(2, 1)=C_2(2, 4)$$

であるが，

$$C_1(3, 1)\neq C_2(3, 4),$$
$$C_1(4, 1)\neq C_2(4, 4)$$

である。従って，C_2 のどの列ベクトルも C_1 の第１列ベクトルのスカラー倍になっていない。

同じ考察を C_1 の第２列ベクトル，第３列ベクトル，第４列ベクトルに対して行うと，次のことが予想できる：

$$C_1\not\sim C_2 \text{ より } A_1\not\sim A_2.$$

7　今後の研究

定理1.1は数値的な結果である。従って，代数的な解でない。勿論，代数的な解が求まればよいが，それは今のところ期待できない。

今後の研究として，特に２冪の位数をもつ有限巡回群上のスピンモデルに対して，定理1.1と同様の結果が得られるのかどうかに興味がある。

次の課題としては８点の有限巡回群上のスピンモデルに対して，§.5.2の考察を行うことであるが，８点ならパラメータの数は16個となり，これらのパラメータが綺麗な形で振る舞ってくれるのかどうかは興味あるところである。

参考文献

[1] E. Bannai and Et. Bannai, *Spin models on finite cyclic groups,* J. Alg. Combin. **3** (1994), 243-259.

[2] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I,* Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984.

[3] R. Godsil and A. Roy, *Equiangular lines, mutually unbiased bases, and spin models,* arXiv: quantph/0511004 v1, 2005.

[4] T. Ikuta, *An infinite class of non-symmetric spin models, Potts models, and Hadamard Matrices,* preprint.

[5] T. Ikuta, *Spin models of index 4g and 4g+2 and Potts models,* preprint.

[6] T. Ikuta and K. Nomura, *General Form of Non-Symmetric Spin Models,* J. Alg. Combin. **12** (2000), 59-72.

[7] V.F.R. Jones, *On knot invariants related to some statistical mechanical models,* Pac. J. Math. **137** (1989), 311-336.

[8] K. Kawagoe, A. Munemasa, and Y. Watatani, *Generalized spin models,* J. of Knot Th. and its Ramific. **3** (1994), 465-475.

[9] K. Nomura, *Spin models constructed from Hadamard matrices,* J. Combin. Th. (A) **68** (1994), 251-261.