神戸学院法学第39巻第3･4号（2010年3月）

Spin models of index 4 and Potts models

生　田　卓　也

Abstract

A spin model (for link invariants) is a square matrix W with non-zero complex entries which satisfies certain axioms. For a spin model W, it is known that the matrix $R = W^{T}W^{-1}$ is a permutation matrix, and its order is called the index of W. F. Jaeger and K. Nomura found spin models of index 2, by modifying the construction of symmetric spin models from Hadamard matrices. A. Munemasa and I gave a construction of spin models of an arbitrary even index from any Hadamard matrix. The aim of this paper is to present a program of construction of our new spin models.

1　序　　論

スピンモデルは統計力学にヒントを得て1989年に V. F. R. Jones [12] により導入された数理統計学のモデルである。スピンモデルがあれば link invariants が得られる。Jones が定義したスピンモデルは 0 と異なる複素数を成分にもつ正方行列で定義される。最初に Jones が定義したスピンモデルについて述べる。

X を位数 $n = |X|$ の有限集合とする。$Mat_n(\mathbb{C}^*)$ を 0 と異なる複素数を成分にもち，X の元で順序付けられた正方行列全体の集合とする。W の (x, y) 成分を $W(x, y)$ で表わす。$W \in Mat_n(\mathbb{C}^*)$ が X 上の

type II **行列**であるとは，任意の $\alpha, \beta \in X$ に対して

$$\sum_{x \in X} \frac{W(\alpha, x)}{W(\beta, x)} = n\delta_{\alpha, \beta} \tag{1}$$

が成り立つときをいう。$W^{-} \in Mat_n(\mathbb{C}^*)$ を $W^{-}(x, y) = W(y, x)^{-1}$ で定義する。このとき，type II 行列の条件は $WW^{-} = nI$ と書ける。ここで I は単位行列である。W が type II 行列なら，W は $W^{-1} = n^{-1}W^{-}$ を満たす正則行列である。$W^{-} \in Mat_n(\mathbb{C}^*)$ が X 上の *type III* **行列**であるとは，任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対して

$$\sum_{x \in X} \frac{W(\alpha, x)W(\beta, x)}{W(\gamma, x)} = D\frac{W(\alpha, \beta)}{W(\alpha, \gamma)W(c, \beta)} \tag{2}$$

が成り立つときをいう。D は $D^2 = n$ を満たすある実数である。$W \in Mat_n(\mathbb{C}^*)$ が(１)と(２)を満たすとき，W を X 上の**スピンモデル**という。特に，W が対称行列のとき，W を**対称スピンモデル**という。そうでないとき**非対称スピンモデル**という。

対称スピンモデルは非対称スピンモデルの一部であるが，研究の困難さは対称スピンモデルの方がはるかに難しい。その理由は，対称スピンモデルは対称であるが故に，その情報量が激減し構成が難しいことによる。一方，非対称スピンモデルは非対称であるために，対称性からのズレを考察することにより，構造が見え易いという利点がある。非対称スピンモデルについては，次の構造定理が存在する。次の結果は F. Jaeger と K. Nomura [11] による。

$W \in Mat_n(\mathbb{C}^*)$ をスピンモデルとする。[11, Proposition 2] によれば，$R = W^{T}W^{-1}$ は置換行列である。R の群としての位数をスピンモデル W の *index* と呼ぶ。[11, Proposition 7] によれば，W が index m のスピンモデルなら，次の条件を満たす X の分割が存在する：

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_m} X_i. \tag{3}$$

但し，任意の $i \in \mathbb{Z}_m$ に対して $|X_i| = n/m$ であり，任意の $i, j \in \mathbb{Z}_m$ と任意の $x \in X_i, y \in X_j$ に対して

$$W(x, y) = \eta^{i-j} W(y, x) \tag{4}$$

が成り立つ。η は 1 の原始 m 乗根である。index $m=1$ であることと，W が対称行列であることとは同値である。(4)は非対称性を示す重要な式である。

更に，F. Jaeger と K. Nomura は [11] で index 2 のスピンモデルの一般形 W を与え，その一般形 W がスピンモデルになるための必要十分条件を与えた。次の結果は [11] による。

定理1.1. $W \in Mat_n(\mathbb{C}^*)$ を X 上の *index* 2 のスピンモデルとする。このとき，W の一般形は次で与えられる。$A, B, C \in Mat_r(\mathbb{C}^*)$，$r=n/4$ とする。

$$W = \begin{array}{c} \\ X_0 \\ X_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} X_0 & X_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes A & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes B \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes B^T & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes C \end{array} \right) \end{array} \quad A, C \text{ は対称行列.} \tag{5}$$

(5)がスピンモデルであるための必要十分条件は，次の条件を満たすことである：

(i) A, C は対称スピンモデルである。B は *type II* 行列である。

(ii) 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ に対して

$$\sum_{y \in Y} \frac{A(\alpha, y) B(y, \beta)}{B(y, \gamma)} = D \frac{B(\alpha, \beta)}{C(\beta, \gamma) B(\alpha, \gamma)},$$

$$\sum_{y \in Y} \frac{B(y, \beta) B(y, \gamma)}{A(\alpha, y)} = -D \frac{C(\beta, \gamma)}{B(\alpha, \beta) B(\alpha, \gamma)}$$

が成り立つ。

(5)を満たす例として，F. Jaeger と K. Nomura は [11, Section 5] で次の *non-symmetric Hadamard model* と呼ばれるスピンモデルを構成した。

$$W=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} X_0 & X_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} X_0 \\ X_1 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes A & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \xi H \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \xi H^T & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes A \end{array}\right), \end{array} \qquad (6)$$

但し，$A \in Mat_r(\mathbb{C}^*)$ は Potts model である。$H \in Mat_r(\mathbb{C}^*)$ は任意の Hadamard matrix である。ξ は 1 の原始 8 乗根である。ξ を $\sqrt{-1}$ に置き換えると，*Hadamard model*［11, 15］と呼ばれる対称なスピンモデルが得られる。

Non-symmetric Hadamard model は任意の Hadamard 行列 H に対して構成できる点が重要である。これにより（6）は無限系列のスピンモデルの例を与えていることになる。

定理1.1は index 2 のスピンモデルの一般形を与えたと共に，その一般形がスピンモデルになるための必要十分条件を与えたという点で非常に重要な結果である。次の研究の方向性として，任意の index $m(\neq 1)$ のスピンモデルの一般形を決定すると共に，その一般形がスピンモデルになるための必要十分条件を与えることにある。そして，non-symmetric Hadamard model の拡張となる無限系列の例を構成することである。スピンモデルの研究には，スピンモデルの分類が難しいのなら，スピンモデルの例を構成するという大きな研究テーマが存在する。スピンモデルの研究の醍醐味は，代数的組合せ論の立場からスピンモデルの自明でない例を幾らでも構成可能であることを示すことにある。

K. Nomura と筆者は［9］で任意の index m のスピンモデルの一般形 W を与え，W がスピンモデルになるための条件を与えた。その後，A. Munemasa と筆者は［8］で index m のスピンモデルの一般形 W に対して，その W がスピンモデルになるための必要十分条件を与えた。これにより，任意の index m のスピンモデルの一般的な状況を完全に把握したことになる。［9］，［8］の結果の中で本論文に必要な箇所を次

に書き下す。

定理1.2. W を *index* m のスピンモデルとする。このとき，W の (i, j) ブロックは次で与えられる：

$$W_{ij}=S_{ij}\otimes T_{ij} \quad (i, j\in\mathbb{Z}_m). \tag{7}$$

但し，

$$S_{ij}(\ell, \ell')=\eta^{-(\ell-\ell')(i-j)} \quad (\ell, \ell'\in\mathbb{Z}_m)$$

であり，η は1の原始 m 乗根である。T_{ij} はサイズ $r=n/(m^2)$ の正方行列である。$Y=\{1, \cdots, r\}$ とおく。

W がスピンモデルになるための必要十分条件は，T_{ij} が *type II* 行列であり，任意の $i_1, i_2, i_3\in\{0, \cdots, m-1\}$ と任意の $\alpha, \beta, \gamma\in Y$ に対して

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{i_1,i}(\alpha, y)\,T_{i_2,i}(\beta, y)}{T_{i_3,i}(\gamma, y)}=D\frac{T_{i_1,i_2}(\alpha, \beta)}{T_{i_1,i_3}(\alpha, \gamma)\,T_{i_3,i_2}(\gamma, \beta)} \tag{8}$$

が成り立つことである。但し $i=i_1+i_2-i_3\in\mathbb{Z}_m$, $D^2=r$ である。

定理1.2の結果を受けて，次の大きなテーマは任意の index m のスピンモデルの構成に移る。本論文の目的の一つは，index 4 のスピンモデルで non-symmetric Hadamard spin model の拡張となる例を構成することであるが，無頓着にコンピュータを使って計算するのではなく，次の分類結果が土台になっていることを示すことにある。従って，次の分類結果は本論文の土台となる重要な結果である。

K. Nomura は [17] で index 2 のスピンモデル W に対して，A が Potts model である場合を分類した。次の結果は [17] による。

定理1.3. W を(5)の A が *Potts model* であるスピンモデルとする。このとき，W は次のスピンモデルの少なくとも一つと同値である。

(i) W は *non-symmetric Hadamard model* である。

(ii) W は次のスピンモデルと A の直積で表される：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \eta & -\eta \\ 1 & 1 & -\eta & \eta \\ -\eta & \eta & 1 & 1 \\ \eta & -\eta & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^4=-1.$$

(iii)　(5)のサイズは16で，(5)の B が次の行列で表される：

$$B=\begin{pmatrix} r & r & ir^{-1} & -ir^{-1} \\ r & r & -ir^{-1} & ir^{-1} \\ ir^{-1} & -ir^{-1} & r & r \\ -ir^{-1} & ir^{-1} & r & r \end{pmatrix}.$$

r は0と異なる任意の複素数である。$i^2=-1$ である。

以降，W は index $m=4$ のスピンモデルとする。W の対角ブロック $W_{ii}(i\in\mathbb{Z}_4)$ に Potts models が埋め込まれていると仮定する。W に対する(8)は64個現れるが，そのうちの幾つかの式は定理1.3と全く同じ式が現れる。(6)は任意の Hadamard 行列 H に対して構成できたが，本論文で構成するスピンモデルの構成に使う Hadamard 行列 H は対称であると制限を加えておく。

本論文では次の結果を示す：

定理1.4.　(9)で $T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33}$ を *Potts model* $A(A=-u^3I+u^{-1}(J-I))$ とする。$T_{02}=T_{13}=\xi A(\xi^4=-1)$ とおく。$T_{01}=T_{12}=T_{23}=\tau_1 H$, $T_{03}=\tau_2 H$ $(\tau_2=\eta\xi^2\tau_1,\ \tau_1^4=\eta^{-1}\xi)$ とおく。H はある対称な *Hadamard* 行列である。このとき，(9)はスピンモデルになる。

2　定理1.4の証明

W　index 4 のスピンモデルとする。index 4 のスピンモデル W の一般形は(7)より次で与えられる：

$$W=\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} & W_{02} & W_{03} \\ W_{10} & W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{20} & W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{30} & W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$\ell\in\mathbb{Z}_4$ に対して $\ell+1, \ell+2, \ell+3\in\mathbb{Z}_4$ とする。

$$W_{\ell,\ell}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\otimes T_{\ell,\ell},\quad W_{\ell,\ell+1}=\begin{pmatrix}1&\eta^3&-1&\eta\\\eta&1&\eta^3&-1\\-1&\eta&1&\eta^3\\\eta^3&-1&\eta&1\end{pmatrix}\otimes T_{\ell,\ell+1},$$

$$W_{\ell,\ell+2}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\otimes T_{\ell,\ell+2},$$

$$W_{\ell,\ell+3}=\begin{pmatrix}1&\eta&-1&\eta^3\\\eta^3&1&\eta&-1\\-1&\eta^3&1&\eta\\\eta&-1&\eta^3&1\end{pmatrix}\otimes T_{\ell,\ell+3}.$$

但し，$\eta=\pm\sqrt{-1}$ である。

（9）の行と列は X_0, X_1, X_2, X_3 でインデックスされている。［9］によれば任意の $x\in X_\ell$ と任意の $y\in X_{\ell'}$ $(\ell, \ell'\in\mathbb{Z}_4)$ に対して

$$W(x, y)=\eta^{\ell-\ell'}W(y, x)$$

が成り立つので，次を得る：

補題 2.1． $T_{10}=\eta T_{01}^T$, $T_{21}=\eta T_{12}^T$, $T_{32}=\eta T_{23}^T$, $T_{20}=-T_{02}^T$, $T_{31}=-T_{13}^T$, $T_{30}=\eta^3T_{03}^T$.

定理1.4の形は，（9）の第2ブロックと第3ブロックの置換を行と列に施すと，次の形である：

$$W=\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&W_{22}\end{pmatrix}.$$

但し，

$$W_{11}=W_{22}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & \xi & -\xi & \xi & -\xi \\
1 & 1 & 1 & 1 & -\xi & \xi & -\xi & \xi \\
1 & 1 & 1 & 1 & \xi & -\xi & \xi & -\xi \\
1 & 1 & 1 & 1 & -\xi & \xi & -\xi & \xi \\
\hline
-\xi & \xi & -\xi & \xi & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\xi & -\xi & \xi & -\xi & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-\xi & \xi & -\xi & \xi & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\xi & -\xi & \xi & -\xi & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)\otimes A,$$

$$W_{12}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
\tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_2 & \eta\tau_2 & -\tau_2 & \eta^3\tau_2 \\
\eta\tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 & \eta^3\tau_2 & \tau_2 & \eta\tau_2 & -\tau_2 \\
-\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_2 & \eta^3\tau_2 & \tau_2 & \eta\tau_2 \\
\eta^3\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1 & \eta\tau_2 & -\tau_2 & \eta^3\tau_2 & \tau_2 \\
\hline
\eta\tau_1 & -\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 \\
\tau_1 & \eta\tau_1 & -\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 \\
\eta^3\tau_1 & \tau_1 & \eta\tau_1 & -\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 \\
-\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \tau_1 & \eta\tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1
\end{array}\right)\otimes H,$$

$$W_{21}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
\eta\tau_1 & -\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 \\
\tau_1 & \eta\tau_1 & -\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 \\
\eta^3\tau_1 & \tau_1 & \eta\tau_1 & -\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1 & \eta^3\tau_1 \\
-\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \tau_1 & \eta\tau_1 & \eta^3\tau_1 & -\tau_1 & \eta\tau_1 & \tau_1 \\
\hline
\eta^3\tau_2 & -\tau_2 & \eta\tau_2 & \tau_2 & \eta\tau_1 & -\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \tau_1 \\
\tau_2 & \eta^3\tau_2 & -\tau_2 & \eta\tau_2 & \tau_1 & \eta\tau_1 & -\tau_1 & \eta^3\tau_1 \\
\eta\tau_2 & \tau_2 & \eta^3\tau_2 & -\tau_2 & \eta^3\tau_1 & \tau_1 & \eta\tau_1 & -\tau_1 \\
-\tau_2 & \eta\tau_2 & \tau_2 & \eta^3\tau_2 & -\tau_1 & \eta^3\tau_1 & \tau_1 & \eta\tau_1
\end{array}\right)\otimes H.$$

（8）を使うと64個の式が現れる。次ページの左側の式は（8）を使って書き下した式で，その右側の式は系2.1をそのまま代入した式である。

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha, y)\,T_{00}(\beta, y)}{T_{00}(\gamma, y)}=D\frac{T_{00}(\alpha, \beta)}{T_{00}(\alpha, \gamma)\,T_{00}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha, y)\,T_{03}(\beta, y)}{T_{13}(\gamma, y)}=D\frac{T_{00}(\alpha, \beta)}{T_{01}(\alpha, \gamma)\,T_{10}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha, y)\,T_{03}(\beta, y)}{T_{13}(\gamma, y)}=D\frac{T_{00}(\alpha, \beta)}{T_{01}(\alpha, \gamma)\,(\eta T_{01}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha, y)\,T_{02}(\beta, y)}{T_{22}(\gamma, y)}=D\frac{T_{00}(\alpha, \beta)}{T_{02}(\alpha, \gamma)\,T_{20}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha, y)\,T_{02}(\beta, y)}{T_{22}(\gamma, y)}=D\frac{T_{00}(\alpha, \beta)}{T_{02}(\alpha, \gamma)\,(-T_{02}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha, y)\,T_{01}(\beta, y)}{T_{31}(\gamma, y)}=D\frac{T_{00}(\alpha, \beta)}{T_{03}(\alpha, \gamma)\,T_{30}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha, y)\,T_{01}(\beta, y)}{-T_{13}(y, \gamma)}=D\frac{T_{00}(\alpha, \beta)}{T_{03}(\alpha, \gamma)\,(\eta^3 T_{03}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha, y)\,T_{11}(\beta, y)}{T_{01}(\gamma, y)}=D\frac{T_{01}(\alpha, \beta)}{T_{00}(\alpha, \gamma)\,T_{01}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha, y)\,T_{10}(\beta, y)}{T_{10}(\gamma, y)}=D\frac{T_{01}(\alpha, \beta)}{T_{01}(\alpha, \gamma)\,T_{11}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha, y)\,(\eta T_{01}(y, \beta))}{\eta T_{01}(y, \gamma)}=D\frac{T_{01}(\alpha, \beta)}{T_{01}(\alpha, \gamma)\,T_{11}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha, y)\,T_{13}(\beta, y)}{T_{23}(\gamma, y)}=D\frac{T_{01}(\alpha, \beta)}{T_{02}(\alpha, \gamma)\,T_{21}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha, y)\,T_{13}(\beta, y)}{T_{23}(\gamma, y)}=D\frac{T_{01}(\alpha, \beta)}{T_{02}(\alpha, \gamma)\,(\eta T_{12}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha, y)\,T_{12}(\beta, y)}{T_{32}(\gamma, y)}=D\frac{T_{01}(\alpha, \beta)}{T_{03}(\alpha, \gamma)\,T_{31}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha, y)\,T_{12}(\beta, y)}{\eta T_{23}(y, \gamma)}=D\frac{T_{01}(\alpha, \beta)}{T_{03}(\alpha, \gamma)\,(-T_{13}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha,y)T_{22}(\beta,y)}{T_{02}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{00}(\alpha,\gamma)T_{02}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)T_{21}(\beta,y)}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{12}(\gamma,\beta)}$$

$$\rightarrow\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)(\eta T_{12}(y,\beta))}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{12}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)T_{20}(\beta,y)}{T_{20}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{22}(\gamma,\beta)}$$

$$\rightarrow\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)(-T_{02}(y,\beta))}{-T_{02}(y,\gamma)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{22}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha,y)T_{23}(\beta,y)}{T_{33}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)T_{32}(\gamma,\beta)}$$

$$\rightarrow\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha,y)T_{23}(\beta,y)}{T_{33}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)(\eta T_{23}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha,y)T_{33}(\beta,y)}{T_{03}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{00}(\alpha,\gamma)T_{03}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha,y)T_{32}(\beta,y)}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{13}(\gamma,\beta)}$$

$$\rightarrow\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha,y)(\eta T_{23}(y,\beta))}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{13}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)T_{31}(\beta,y)}{T_{21}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{23}(\gamma,\beta)}$$

$$\rightarrow\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)(-T_{13}(y,\beta))}{\eta T_{12}(y,\gamma)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{23}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)T_{30}(\beta,y)}{T_{30}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)}$$

$$\rightarrow\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)(\eta^{3}T_{03}(y,\beta))}{\eta^{3}T_{03}(y,\gamma)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha,y)T_{01}(\beta,y)}{T_{01}(\gamma,y)}=D\frac{T_{10}(\alpha,\beta)}{T_{10}(\alpha,\gamma)T_{00}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha,y)T_{01}(\beta,y)}{T_{01}(\gamma,y)}=D\frac{\eta T_{01}(\beta,\alpha)}{(\eta T_{01}(\gamma,\alpha)T_{00}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{10}(\alpha,y)T_{00}(\beta,y)}{T_{10}(\gamma,y)}=D\frac{T_{10}(\alpha,\beta)}{T_{11}(\alpha,\gamma)T_{10}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{01}(y,\alpha))T_{00}(\beta,y)}{\eta T_{01}(y,\gamma)}=D\frac{\eta T_{01}(\beta,\alpha)}{T_{11}(\alpha,\gamma)(\eta T_{01}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{23}(\gamma,y)}=D\frac{T_{10}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\alpha,\gamma)T_{20}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{23}(\gamma,y)}=D\frac{\eta T_{01}(\beta,\alpha)}{T_{12}(\alpha,\gamma)(-T_{02}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{02}(\beta,y)}{T_{32}(\gamma,y)}=D\frac{T_{10}(\alpha,\beta)}{T_{13}(\alpha,\gamma)T_{30}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{02}(\beta,y)}{\eta T_{23}(y,\gamma)}=D\frac{\eta T_{01}(\beta,\alpha)}{T_{13}(\alpha,\gamma)(\eta^{3}T_{03}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{12}(\beta,y)}{T_{02}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{10}(\alpha,\gamma)T_{01}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{12}(\beta,y)}{T_{02}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{(\eta T_{01}(\gamma,\alpha))T_{01}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha,y)T_{11}(\beta,y)}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{11}(\alpha,\gamma)T_{11}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{10}(\alpha,y)T_{10}(\beta,y)}{T_{20}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\alpha,\gamma)T_{21}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{01}(y,\alpha))(\eta T_{01}(\beta,y))}{-T_{02}(y,\gamma)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\alpha,\gamma)(\eta T_{12}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha,y)T_{13}(\beta,y)}{T_{33}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{13}(\alpha,\gamma)T_{31}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha, y)\,T_{13}(\beta, y)}{T_{33}(\gamma, y)}=D\frac{T_{11}(\alpha, \beta)}{T_{13}(\alpha, \gamma)(-T_{13}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha, y)\,T_{23}(\beta, y)}{T_{03}(\gamma, y)}=D\frac{T_{12}(\alpha, \beta)}{T_{10}(\alpha, \gamma)\,T_{02}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha, y)\,T_{23}(\beta, y)}{T_{03}(\gamma, y)}=D\frac{T_{12}(\alpha, \beta)}{(\eta T_{01}(\gamma, \alpha))\,T_{02}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha, y)\,T_{22}(\beta, y)}{T_{12}(\gamma, y)}=D\frac{T_{12}(\alpha, \beta)}{T_{11}(\alpha, \gamma)\,T_{12}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha, y)\,T_{21}(\beta, y)}{T_{21}(\gamma, y)}=D\frac{T_{12}(\alpha, \beta)}{T_{12}(\alpha, \gamma)\,T_{22}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha, y)(\eta T_{12}(y, \beta))}{\eta T_{12}(y, \gamma)}=D\frac{T_{12}(\alpha, \beta)}{T_{12}(\alpha, \gamma)\,T_{22}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{10}(\alpha, y)\,T_{20}(\beta, y)}{T_{30}(\gamma, y)}=D\frac{T_{12}(\alpha, \beta)}{T_{13}(\alpha, \gamma)\,T_{32}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{01}(y, \alpha))(-T_{02}(y, \beta))}{\eta^3 T_{03}(y, \gamma)}=D\frac{T_{12}(\alpha, \beta)}{T_{13}(\alpha, \gamma)(\eta T_{23}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{10}(\alpha, y)\,T_{30}(\beta, y)}{T_{00}(\gamma, y)}=D\frac{T_{13}(\alpha, \beta)}{T_{10}(\alpha, \gamma)\,T_{03}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{01}(y, \alpha))(\eta^3 T_{03}(y, \beta))}{T_{00}(y, \gamma)}=D\frac{T_{13}(\alpha, \beta)}{(\eta T_{01}(\gamma, \alpha))\,T_{03}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha, y)\,T_{33}(\beta, y)}{T_{13}(\gamma, y)}=D\frac{T_{13}(\alpha, \beta)}{T_{11}(\alpha, \gamma)\,T_{13}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha, y)\,T_{32}(\beta, y)}{T_{22}(\gamma, y)}=D\frac{T_{13}(\alpha, \beta)}{T_{12}(\alpha, \gamma)\,T_{23}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha, y)(\eta T_{23}(y, \beta))}{T_{22}(\gamma, y)}=D\frac{T_{13}(\alpha, \beta)}{T_{12}(\alpha, \gamma)\,T_{23}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha, y)\,T_{31}(\beta, y)}{T_{31}(\gamma, y)}=D\frac{T_{13}(\alpha, \beta)}{T_{13}(\alpha, \gamma)\,T_{33}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha, y)(-T_{13}(y, \beta))}{-T_{13}(y, \gamma)}=D\frac{T_{13}(\alpha, \beta)}{T_{13}(\alpha, \gamma)T_{33}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha, y)T_{02}(\beta, y)}{T_{02}(\gamma, y)}=D\frac{T_{20}(\alpha, \beta)}{T_{20}(\alpha, \gamma)T_{00}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha, y)T_{02}(\beta, y)}{T_{02}(\gamma, y)}=D\frac{-T_{02}(\beta, \alpha)}{(-T_{02}(\gamma, \alpha))T_{00}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{21}(\alpha, y)T_{01}(\beta, y)}{T_{11}(\gamma, y)}=D\frac{T_{20}(\alpha, \beta)}{T_{21}(\alpha, \gamma)T_{10}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{12}(y, \alpha))T_{01}(\beta, y)}{T_{11}(\gamma, y)}=D\frac{-T_{02}(\beta, \alpha)}{(\eta T_{12}(\gamma, \alpha))(\eta T_{01}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{20}(\alpha, y)T_{00}(\beta, y)}{T_{20}(\gamma, y)}=D\frac{T_{20}(\alpha, \beta)}{T_{22}(\alpha, \gamma)T_{20}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{(-T_{02}(y, \alpha))T_{00}(\beta, y)}{-T_{02}(y, \gamma)}=D\frac{-T_{02}(\beta, \alpha)}{T_{22}(\alpha, \gamma)(-T_{02}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha, y)T_{03}(\beta, y)}{T_{33}(\gamma, y)}=D\frac{T_{20}(\alpha, \beta)}{T_{23}(\alpha, \gamma)T_{30}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha, y)T_{03}(\beta, y)}{T_{33}(\gamma, y)}=D\frac{-T_{02}(\beta, \alpha)}{T_{23}(\alpha, \gamma)(\eta^{3}T_{03}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha, y)T_{13}(\beta, y)}{T_{03}(\gamma, y)}=D\frac{T_{21}(\alpha, \beta)}{T_{20}(\alpha, \gamma)T_{01}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha, y)T_{13}(\beta, y)}{T_{03}(\gamma, y)}=D\frac{\eta T_{12}(\beta, \alpha)}{(-T_{02}(\gamma, \alpha))T_{01}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha, y)T_{12}(\beta, y)}{T_{12}(\gamma, y)}=D\frac{T_{21}(\alpha, \beta)}{T_{21}(\alpha, \gamma)T_{11}(\gamma, \beta)}$$

$$\rightarrow \sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha, y)T_{12}(\beta, y)}{T_{12}(\gamma, y)}=D\frac{\eta T_{12}(\beta, \alpha)}{(\eta T_{12}(\gamma, \alpha))T_{11}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{21}(\alpha, y)T_{11}(\beta, y)}{T_{21}(\gamma, y)}=D\frac{T_{21}(\alpha, \beta)}{T_{22}(\alpha, \gamma)T_{21}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{12}(y,\alpha))T_{11}(\beta,y)}{\eta T_{12}(y,\gamma)}=D\frac{\eta T_{12}(\beta,\alpha)}{T_{22}(\alpha,\gamma)(\eta T_{12}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{20}(\alpha,y)T_{10}(\beta,y)}{T_{30}(\gamma,y)}=D\frac{T_{21}(\alpha,\beta)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{31}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(-T_{02}(y,\alpha))(\eta T_{01}(y,\beta))}{\eta^3 T_{03}(y,\gamma)}=D\frac{\eta T_{12}(\beta,\alpha)}{T_{23}(\alpha,\gamma)(-T_{13}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{20}(\alpha,y)T_{20}(\beta,y)}{T_{00}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{20}(\alpha,\gamma)T_{02}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(-T_{02}(y,\alpha))(-T_{02}(y,\beta))}{T_{00}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\gamma,\alpha)(-T_{02}(\gamma,\beta))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha,y)T_{23}(\beta,y)}{T_{13}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{21}(\alpha,\gamma)T_{12}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha,y)T_{23}(\beta,y)}{T_{13}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{(\eta T_{12}(\gamma,\alpha)T_{12}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha,y)T_{22}(\beta,y)}{T_{22}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{22}(\alpha,\gamma)T_{22}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{21}(\alpha,y)T_{21}(\beta,y)}{T_{31}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{32}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{12}(y,\alpha))(\eta T_{12}(y,\beta))}{-T_{13}(y,\gamma)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{23}(\alpha,\gamma)(\eta T_{23}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{21}(\alpha,y)T_{31}(\beta,y)}{T_{01}(\gamma,y)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{20}(\alpha,\gamma)T_{03}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{12}(y,\alpha))(-T_{13}(y,\beta))}{T_{01}(\gamma,y)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{(-T_{02}(\gamma,\alpha))T_{03}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{20}(\alpha,y)T_{30}(\beta,y)}{T_{10}(\gamma,y)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{21}(\alpha,\gamma)T_{13}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(-T_{02}(y,\alpha))(\eta^3 T_{03}(y,\beta))}{\eta T_{01}(y,\gamma)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{(\eta T_{12}(\gamma,\alpha))T_{13}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha,y)T_{33}(\beta,y)}{T_{23}(\gamma,y)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{22}(\alpha,\gamma)T_{23}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha,y)T_{32}(\beta,y)}{T_{32}(\gamma,y)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha,y)(\eta T_{23}(y,\beta))}{\eta T_{23}(y,\gamma)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{33}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{03}(\gamma,y)}=D\frac{T_{30}(\alpha,\beta)}{T_{30}(\alpha,\gamma)T_{00}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{T_{33}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{03}(\gamma,y)}=D\frac{\eta^3T_{03}(\beta,\alpha)}{(\eta^3T_{03}(\gamma,\alpha))T_{00}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{32}(\alpha,y)T_{02}(\beta,y)}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{T_{30}(\alpha,\beta)}{T_{31}(\alpha,\gamma)T_{10}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{23}(y,\alpha))T_{02}(\beta,y)}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{\eta^3T_{03}(\beta,\alpha)}{(-T_{13}(\gamma,\alpha))(\eta T_{01}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{31}(\alpha,y)T_{01}(\beta,y)}{T_{21}(\gamma,y)}=D\frac{T_{30}(\alpha,\beta)}{T_{32}(\alpha,\gamma)T_{20}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{(-T_{13}(y,\alpha))T_{01}(\beta,y)}{\eta T_{12}(y,\gamma)}=D\frac{\eta^3T_{03}(\beta,\alpha)}{(\eta T_{23}(\gamma,\alpha))(-T_{02}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{30}(\alpha,y)T_{00}(\beta,y)}{T_{30}(\gamma,y)}=D\frac{T_{30}(\alpha,\beta)}{T_{33}(\alpha,\gamma)T_{30}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{(\eta^3T_{03}(y,\alpha))T_{00}(\beta,y)}{\eta^3T_{03}(y,\gamma)}=D\frac{\eta^3T_{03}(\beta,\alpha)}{T_{33}(\alpha,\gamma)(\eta^3T_{03}(\beta,\gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{30}(\alpha,y)T_{10}(\beta,y)}{T_{00}(\gamma,y)}=D\frac{T_{31}(\alpha,\beta)}{T_{30}(\alpha,\gamma)T_{01}(\gamma,\beta)}$$

$$\to\sum_{y\in Y}\frac{(\eta^3T_{03}(y,\alpha))(\eta T_{01}(y,\beta))}{T_{00}(\gamma,y)}=D\frac{-T_{13}(\beta,\alpha)}{(\eta^3T_{03}(\gamma,\alpha))T_{01}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{33}(\alpha,y)T_{13}(\beta,y)}{T_{13}(\gamma,y)}=D\frac{T_{31}(\alpha,\beta)}{T_{31}(\alpha,\gamma)T_{11}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y} \frac{T_{33}(\alpha, y)\, T_{13}(\beta, y)}{T_{13}(\gamma, y)} = D \frac{-T_{13}(\beta, \alpha)}{(-T_{13}(\gamma, \alpha))\, T_{11}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y} \frac{T_{32}(\alpha, y)\, T_{12}(\beta, y)}{T_{22}(\gamma, y)} = D \frac{T_{31}(\alpha, \beta)}{T_{32}(\alpha, \gamma)\, T_{21}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y} \frac{(\eta T_{23}(y, \alpha))\, T_{12}(\beta, y)}{T_{22}(\gamma, y)} = D \frac{-T_{13}(\beta, \alpha)}{(\eta T_{23}(\gamma, \alpha))(\eta T_{12}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y} \frac{T_{31}(\alpha, y)\, T_{11}(\beta, y)}{T_{31}(\gamma, y)} = D \frac{T_{31}(\alpha, \beta)}{T_{33}(\alpha, \gamma)\, T_{31}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y} \frac{(-T_{13}(y, \alpha))\, T_{11}(\beta, y)}{-T_{13}(y, \gamma)} = D \frac{-T_{13}(\beta, \alpha)}{T_{33}(\alpha, \gamma)(-T_{13}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y} \frac{T_{31}(\alpha, y)\, T_{21}(\beta, y)}{T_{01}(\gamma, y)} = D \frac{T_{32}(\alpha, \beta)}{T_{30}(\alpha, \gamma)\, T_{02}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y} \frac{(-T_{13}(y, \alpha))(\eta T_{12}(y, \beta))}{T_{01}(\gamma, y)} = D \frac{\eta T_{23}(\beta, \alpha)}{(\eta^3 T_{03}(\gamma, \alpha))\, T_{02}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y} \frac{T_{30}(\alpha, y)\, T_{20}(\beta, y)}{T_{10}(\gamma, y)} = D \frac{T_{32}(\alpha, \beta)}{T_{31}(\alpha, \gamma)\, T_{12}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y} \frac{(\eta^3 T_{03}(y, \alpha))(-T_{02}(y, \beta))}{\eta T_{01}(y, \gamma)} = D \frac{\eta T_{23}(\beta, \alpha)}{(-T_{13}(\gamma, \alpha))\, T_{12}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y} \frac{T_{33}(\alpha, y)\, T_{23}(\beta, y)}{T_{23}(\gamma, y)} = D \frac{T_{32}(\alpha, \beta)}{T_{32}(\alpha, \gamma)\, T_{22}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y} \frac{T_{33}(\alpha, y)\, T_{23}(\beta, y)}{T_{23}(\gamma, y)} = D \frac{\eta T_{23}(\beta, \alpha)}{(\eta T_{23}(\gamma, \alpha))\, T_{22}(\gamma, \beta)},$$

$$\sum_{y\in Y} \frac{T_{32}(\alpha, y)\, T_{22}(\beta, y)}{T_{32}(\gamma, y)} = D \frac{T_{32}(\alpha, \beta)}{T_{33}(\alpha, \gamma)\, T_{32}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y} \frac{(\eta T_{23}(y, \alpha))\, T_{22}(\beta, y)}{\eta T_{23}(y, \gamma)} = D \frac{\eta T_{23}(\beta, \alpha)}{T_{33}(\alpha, \gamma)(\eta T_{23}(\beta, \gamma))},$$

$$\sum_{y\in Y} \frac{T_{32}(\alpha, y)\, T_{32}(\beta, y)}{T_{02}(\gamma, y)} = D \frac{T_{33}(\alpha, \beta)}{T_{30}(\alpha, \gamma)\, T_{03}(\gamma, \beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(\eta T_{23}(y,\alpha))(\eta T_{23}(y,\beta))}{T_{02}(\gamma,y)}=D\frac{T_{33}(\alpha,\beta)}{(\eta^3 T_{03}(\gamma,\alpha))T_{03}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{31}(\alpha,y)T_{31}(\beta,y)}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{33}(\alpha,\beta)}{T_{31}(\alpha,\gamma)T_{13}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(-T_{13}(y,\alpha))(-T_{13}(y,\beta))}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{33}(\alpha,\beta)}{(-T_{13}(\gamma,\alpha))T_{13}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{30}(\alpha,y)T_{30}(\beta,y)}{T_{20}(\gamma,y)}=D\frac{T_{33}(\alpha,\beta)}{T_{32}(\alpha,\gamma)T_{23}(\gamma,\beta)}$$

$$\to \sum_{y\in Y}\frac{(\eta^3 T_{03}(y,\alpha))(\eta^3 T_{03}(y,\beta))}{-T_{02}(y,\gamma)}=D\frac{T_{33}(\alpha,\beta)}{(\eta T_{23}(\gamma,\alpha))T_{23}(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{33}(\alpha,y)T_{33}(\beta,y)}{T_{33}(\gamma,y)}=D\frac{T_{33}(\alpha,\beta)}{T_{33}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)}.$$

上に書き下した64個の式を簡潔にすると，次のようになる：

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)T_{00}(\beta,y)}{T_{00}(\gamma,y)}=D\frac{T_{00}(\alpha,\beta)}{T_{00}(\alpha,\gamma)T_{00}(\gamma,\beta)}, \tag{10}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{13}(\gamma,y)}=D\frac{T_{00}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{01}(\beta,\gamma)} \tag{11}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha,y)T_{02}(\beta,y)}{T_{22}(\gamma,y)}=-D\frac{T_{00}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{02}(\beta,\gamma)}, \tag{12}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)T_{01}(\beta,y)}{T_{13}(y,\gamma)}=D\frac{T_{00}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)T_{03}(\beta,\gamma)}, \tag{13}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)T_{11}(\beta,y)}{T_{01}(\gamma,y)}=D\frac{T_{00}(\alpha,\beta)}{T_{00}(\alpha,\gamma)T_{01}(\gamma,\beta)}, \tag{14}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)T_{01}(y,\beta)}{T_{01}(y,\gamma)}=D\frac{T_{01}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{11}(\gamma,\beta)}, \tag{15}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha,y)T_{13}(\beta,y)}{T_{23}(\gamma,y)}=D\frac{T_{01}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{12}(\beta,\gamma)}, \tag{16}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha,y)T_{12}(\beta,y)}{T_{23}(y,\gamma)}=D\frac{T_{01}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)T_{13}(\beta,\gamma)}, \tag{17}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha,y)T_{22}(\beta,y)}{T_{02}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{00}(\alpha,\gamma)T_{02}(\gamma,\beta)}, \tag{18}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)T_{12}(y,\beta)}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{12}(\gamma,\beta)}, \tag{19}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)T_{02}(y,\beta)}{T_{02}(y,\gamma)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{22}(\gamma,\beta)}, \tag{20}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha,y)T_{23}(\beta,y)}{T_{33}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)T_{23}(\beta,\gamma)}, \tag{21}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{03}(\alpha,y)T_{33}(\beta,y)}{T_{03}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{00}(\alpha,\gamma)T_{03}(\gamma,\beta)}, \tag{22}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(\alpha,y)T_{23}(y,\beta)}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\alpha,\gamma)T_{13}(\gamma,\beta)}, \tag{23}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(\alpha,y)T_{13}(y,\beta)}{T_{12}(y,\gamma)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\alpha,\gamma)T_{23}(\gamma,\beta)}, \tag{24}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{00}(\alpha,y)T_{03}(y,\beta)}{T_{03}(y,\gamma)}=D\frac{T_{03}(\alpha,\beta)}{T_{03}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)}, \tag{25}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha,y)T_{01}(\beta,y)}{T_{01}(\gamma,y)}=D\frac{T_{01}(\beta,\alpha)}{T_{01}(\gamma,\alpha)T_{00}(\gamma,\beta)}, \tag{26}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(y,\alpha)T_{00}(\beta,y)}{T_{01}(y,\gamma)}=D\frac{T_{01}(\beta,\alpha)}{T_{11}(\alpha,\gamma)T_{01}(\beta,\gamma)}, \tag{27}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{23}(\gamma,y)}=D\frac{T_{01}(\beta,\alpha)}{T_{12}(\alpha,\gamma)T_{02}(\beta,\gamma)}, \tag{28}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{02}(\beta,y)}{T_{23}(y,\gamma)}=D\frac{T_{01}(\beta,\alpha)}{T_{13}(\alpha,\gamma)T_{03}(\beta,\gamma)}, \tag{29}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{12}(\beta,y)}{T_{02}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\gamma,\alpha)T_{01}(\gamma,\beta)}, \tag{30}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha,y)T_{11}(\beta,y)}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{11}(\alpha,\gamma)T_{11}(\gamma,\beta)}, \tag{31}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(y,\alpha)T_{01}(y,\beta)}{T_{02}(y,\gamma)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\alpha,\gamma)T_{12}(\beta,\gamma)},\tag{32}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha,y)T_{13}(\beta,y)}{T_{33}(\gamma,y)}=D\frac{T_{11}(\alpha,\beta)}{T_{13}(\alpha,\gamma)T_{13}(\beta,\gamma)},\tag{33}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha,y)T_{23}(\beta,y)}{T_{03}(\gamma,y)}=D\frac{T_{12}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\gamma,\alpha)T_{02}(\gamma,\beta)},\tag{34}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{22}(\beta,y)}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{T_{12}(\alpha,\beta)}{T_{11}(\alpha,\gamma)T_{12}(\gamma,\beta)},\tag{35}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha,y)T_{12}(y,\beta)}{T_{12}(y,\gamma)}=D\frac{T_{12}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\alpha,\gamma)T_{22}(\gamma,\beta)},\tag{36}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(y,\alpha)T_{02}(y,\beta)}{T_{03}(y,\gamma)}=D\frac{T_{12}(\alpha,\beta)}{T_{13}(\alpha,\gamma)T_{23}(\beta,\gamma)},\tag{37}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{01}(y,\alpha)T_{03}(y,\beta)}{T_{00}(\gamma,y)}=D\frac{T_{13}(\alpha,\beta)}{T_{01}(\gamma,\alpha)T_{03}(\gamma,\beta)},\tag{38}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{13}(\alpha,y)T_{33}(\beta,y)}{T_{13}(\gamma,y)}=D\frac{T_{13}(\alpha,\beta)}{T_{11}(\alpha,\gamma)T_{13}(\gamma,\beta)},\tag{39}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(\alpha,y)T_{23}(y,\beta)}{T_{22}(\gamma,y)}=D\frac{T_{13}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\alpha,\gamma)T_{23}(\gamma,\beta)},\tag{40}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{11}(\alpha,y)T_{13}(y,\beta)}{T_{13}(y,\gamma)}=D\frac{T_{13}(\alpha,\beta)}{T_{13}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)},\tag{41}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha,y)T_{02}(\beta,y)}{T_{02}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\beta,\alpha)}{T_{02}(\gamma,\alpha)T_{00}(\gamma,\beta)},\tag{42}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(y,\alpha)T_{01}(\beta,y)}{T_{11}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\beta,\alpha)}{T_{12}(\gamma,\alpha)T_{01}(\beta,\gamma)},\tag{43}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(y,\alpha)T_{00}(\beta,y)}{T_{02}(y,\gamma)}=D\frac{T_{02}(\beta,\alpha)}{T_{22}(\alpha,\gamma)T_{02}(\beta,\gamma)},\tag{44}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{33}(\gamma,y)}=D\frac{T_{02}(\beta,\alpha)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{03}(\beta,\gamma)},\tag{45}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha,y)T_{13}(\beta,y)}{T_{03}(\gamma,y)}=D\frac{T_{12}(\beta,\alpha)}{T_{02}(\gamma,\alpha)T_{01}(\gamma,\beta)}, \tag{46}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha,y)T_{12}(\beta,y)}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{T_{12}(\beta,\alpha)}{T_{12}(\gamma,\alpha)T_{11}(\gamma,\beta)}, \tag{47}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(y,\alpha)T_{11}(\beta,y)}{T_{12}(y,\gamma)}=D\frac{T_{12}(\beta,\alpha)}{T_{22}(\alpha,\gamma)T_{12}(\beta,\gamma)}, \tag{48}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(y,\alpha)T_{01}(y,\beta)}{T_{03}(y,\gamma)}=D\frac{T_{12}(\beta,\alpha)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{13}(\beta,\gamma)}, \tag{49}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(y,\alpha)T_{02}(y,\beta)}{T_{00}(\gamma,y)}=-D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\gamma,\alpha)T_{02}(\gamma,\beta)}, \tag{50}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha,y)T_{23}(\beta,y)}{T_{13}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\gamma,\alpha)T_{12}(\gamma,\beta)}, \tag{51}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha,y)T_{22}(\beta,y)}{T_{22}(\gamma,y)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{22}(\alpha,\gamma)T_{22}(\gamma,\beta)}, \tag{52}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(y,\alpha)T_{12}(y,\beta)}{T_{13}(y,\gamma)}=D\frac{T_{22}(\alpha,\beta)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{23}(\beta,\gamma)}, \tag{53}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{12}(y,\alpha)T_{13}(y,\beta)}{T_{01}(\gamma,y)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{02}(\gamma,\alpha)T_{03}(\gamma,\beta)}, \tag{54}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{02}(y,\alpha)T_{03}(y,\beta)}{T_{01}(y,\gamma)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{12}(\gamma,\alpha)T_{13}(\gamma,\beta)}, \tag{55}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(\alpha,y)T_{33}(\beta,y)}{T_{23}(\gamma,y)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{22}(\alpha,\gamma)T_{23}(\gamma,\beta)}, \tag{56}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{22}(\alpha,y)T_{23}(y,\beta)}{T_{23}(y,\gamma)}=D\frac{T_{23}(\alpha,\beta)}{T_{23}(\alpha,\gamma)T_{33}(\gamma,\beta)}, \tag{57}$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{T_{33}(\alpha,y)T_{03}(\beta,y)}{T_{03}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\beta,\alpha)}{T_{03}(\gamma,\alpha)T_{00}(\gamma,\beta)}, \tag{58}$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{T_{23}(y,\alpha)T_{02}(\beta,y)}{T_{12}(\gamma,y)}=D\frac{T_{03}(\beta,\alpha)}{T_{13}(\gamma,\alpha)T_{01}(\beta,\gamma)}, \tag{59}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{13}(y, \alpha) T_{01}(\beta, y)}{T_{12}(y, \gamma)} = D \frac{T_{03}(\beta, \alpha)}{T_{23}(\gamma, \alpha) T_{02}(\beta, \gamma)}, \tag{60}$$

$$\sum_{y \in Y} \frac{T_{03}(y, \alpha) T_{00}(\beta, y)}{T_{03}(y, \gamma)} = D \frac{T_{03}(\beta, \alpha)}{T_{33}(\alpha, \gamma) T_{03}(\beta, \gamma)}, \tag{61}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{03}(y, \alpha) T_{01}(y, \beta)}{T_{00}(\gamma, y)} = D \frac{T_{13}(\beta, \alpha)}{T_{03}(\gamma, \alpha) T_{01}(\gamma, \beta)}, \tag{62}$$

$$\sum_{y \in Y} \frac{T_{33}(\alpha, y) T_{13}(\beta, y)}{T_{13}(\gamma, y)} = D \frac{T_{13}(\beta, \alpha)}{T_{13}(\gamma, \alpha) T_{11}(\gamma, \beta)}, \tag{63}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{23}(y, \alpha) T_{12}(\beta, y)}{T_{22}(\gamma, y)} = D \frac{T_{13}(\beta, \alpha)}{T_{23}(\gamma, \alpha) T_{12}(\beta, \gamma)}, \tag{64}$$

$$\sum_{y \in Y} \frac{T_{13}(y, \alpha) T_{11}(\beta, y)}{T_{13}(y, \gamma)} = D \frac{T_{13}(\beta, \alpha)}{T_{33}(\alpha, \gamma) T_{13}(\beta, \gamma)}, \tag{65}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{13}(y, \alpha) T_{12}(y, \beta)}{T_{01}(\gamma, y)} = D \frac{T_{23}(\beta, \alpha)}{T_{03}(\gamma, \alpha) T_{02}(\gamma, \beta)}, \tag{66}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{03}(y, \alpha) T_{02}(y, \beta)}{T_{01}(y, \gamma)} = D \frac{T_{23}(\beta, \alpha)}{T_{13}(\gamma, \alpha) T_{12}(\gamma, \beta)}, \tag{67}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{33}(\alpha, y) T_{23}(\beta, y)}{T_{23}(\gamma, y)} = D \frac{T_{23}(\beta, \alpha)}{T_{23}(\gamma, \alpha) T_{22}(\gamma, \beta)}, \tag{68}$$

$$\sum_{y \in Y} \frac{T_{23}(y, \alpha) T_{22}(\beta, y)}{T_{23}(y, \gamma)} = D \frac{T_{23}(\beta, \alpha)}{T_{33}(\alpha, \gamma) T_{23}(\beta, \gamma)}, \tag{69}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{23}(y, \alpha) T_{23}(y, \beta)}{T_{02}(\gamma, y)} = D \frac{T_{33}(\alpha, \beta)}{T_{03}(\gamma, \alpha) T_{03}(\gamma, \beta)}, \tag{70}$$

$$\sum_{y \in Y} \frac{T_{13}(y, \alpha) T_{13}(y, \beta)}{T_{11}(\gamma, y)} = D \frac{T_{33}(\alpha, \beta)}{T_{13}(\gamma, \alpha) T_{13}(\gamma, \beta)}, \tag{71}$$

$$\eta \sum_{y \in Y} \frac{T_{03}(y, \alpha) T_{03}(y, \beta)}{T_{02}(y, \gamma)} = D \frac{T_{33}(\alpha, \beta)}{T_{23}(\gamma, \alpha) T_{23}(\gamma, \beta)}, \tag{72}$$

$$\sum_{y \in Y} \frac{T_{33}(\alpha, y) T_{33}(\beta, y)}{T_{33}(\gamma, y)} = D \frac{T_{33}(\alpha, \beta)}{T_{33}(\alpha, \gamma) T_{33}(\gamma, \beta)}. \tag{73}$$

(10)，(31)，(52)，(73) より $T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33}$ は対称スピンモデルである。そこで，$T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33}$ を Potts model とおく。

$\{T_{00}, T_{02}, T_{22}\}$ に注目すると，(12)，(18)(=(42))，(20)(=(44))，(50) は index 2 のスピンモデルに現れる式である。従って，[17] によれば index 2 において T_{02} の行と列の置換，± の符号を入れ替えを許すと

$$T_{02}=\begin{cases}\xi A, & A \text{ は Potts model},\ \xi^4=-1,\\ \xi H, & H \text{ はある Hadamard 行列},\ \xi^4=-1,\\ 4\times 4 \text{ の行列} & \end{cases}$$

のいずれかである。

また，$\{T_{11}, T_{13}, T_{33}\}$ に注目すると，(33)，(39)(=(63))，(41)(=(65))，(71) は index 2 のスピンモデルに現れる式である。従って，同じく [17] によれば index 2 において T_{13} の行と列の置換，± の符号を入れ替えを許すと

$$T_{13}=\begin{cases}\xi A, & A \text{ は Potts model},\ \xi^4=-1,\\ \xi H, & H \text{ はある Hadamard 行列},\ \xi^4=-1,\\ 4\times 4 \text{ の行列} & \end{cases}$$

のいずれかである。index 4 では T_{02}, T_{13} において ± の符号を入れ替えは許されないが，ここでは $T_{02}=T_{13}=\xi A\ (\xi^4=-1)$ とおく。

[17] (Lemma 4.2) によれば，(14)，(15)，(22)，(25)，(26)，(27)，(35)，(36)，(47)，(48)，(56)，(57)，(58)，(61)，(68)，(69) は $T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33}$ が Potts model なら自動的に成り立つ式である。

残った式は，(11)，(13)，(16)，(17)，(19)，(21)，(23)，(24)，(28)，(29)，(30)，(32)，(34)，(37)，(38)，(40)，(43)，(45)，(46)，(49)，(51)，(53)，(54)，(55)，(59)，(60)，(62)，(64)，(66)，(67)，(70)，(72) の32個である。

以降，ある Hadamard 行列 H に対して，

$$T_{01}=T_{12}=T_{23}=\tau_1 H,$$

$$T_{03}=\tau_2 H,$$

とおく。

次ページの式の左側の式は残った32個の式に対して上の値を代入したもので，右側の式はそれらをまとめて計算したものである。

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_2H)(\alpha,y)(\tau_2H)(\beta,y)}{(\xi A)(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\alpha,\gamma)(\tau_1H)(\beta,\gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha,y)(\tau_1H)(\beta,y)}{(\xi A)(y,\gamma)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{(\tau_2H)(\alpha,\gamma)(\tau_2H)(\beta,\gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(\beta,y)}{A(y,\gamma)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_2H)(\alpha,y)(\xi A)(\beta,y)}{(\tau_1H)(\gamma,y)}=D\frac{(\tau_1H)(\alpha,\beta)}{(\xi A)(\alpha,\gamma)(\tau_1H)(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)A(\beta,y)}{H(\gamma,y)}=D\frac{H(\alpha,\beta)}{A(\alpha,\gamma)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(\alpha,y)(\tau_1H)(\beta,y)}{(\tau_1H)(y,\gamma)}=D\frac{(\tau_1H)(\alpha,\beta)}{(\tau_2H)(\alpha,\gamma)(\xi A)(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{A(\alpha,y)H(\beta,y)}{H(y,\gamma)}=D\frac{H(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)A(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha,y)(\tau_1H)(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\alpha,\gamma)(\tau_1H)(\gamma,\beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)H(\gamma,\beta)},\ (*1)$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_2H)(\alpha,y)(\tau_1H)(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\alpha,\beta)}{(\tau_2H)(\alpha,\gamma)(\tau_1H)(\beta,\gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(\alpha,y)(\tau_1H)(y,\beta)}{(\tau_1H)(\gamma,y)}=D\frac{(\tau_2H)(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\alpha,\gamma)(\xi A)(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_1}{\tau_2}\sum_{y\in Y}\frac{A(\alpha, y)H(y, \beta)}{H(\gamma, y)}=D\frac{H(\alpha, \beta)}{H(\alpha, \gamma)A(\gamma, \beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha, y)(\xi A)(y, \beta)}{(\tau_1H)(y, \gamma)}=D\frac{(\tau_2H)(\alpha, \beta)}{(\xi A)(\alpha, \gamma)(\tau_1H)(\gamma, \beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_1}{\tau_2}\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha, y)A(y, \beta)}{H(y, \gamma)}=D\frac{H(\alpha, \beta)}{A(\alpha, \gamma)H(\gamma, \beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(\alpha, y)(\tau_2H)(\beta, y)}{(\tau_1H)(\gamma, y)}=D\frac{(\tau_1H)(\beta, \alpha)}{(\tau_1H)(\alpha, \gamma)(\xi A)(\beta, \gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{A(\alpha, y)H(\beta, y)}{H(\gamma, y)}=D\frac{H(\beta, \alpha)}{H(\alpha, \gamma)A(\beta, \gamma)}, \quad (*2)$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha, y)(\xi A)(\beta, y)}{(\tau_1H)(y, \gamma)}=D\frac{(\tau_1H)(\beta, \alpha)}{(\xi A)(\alpha, \gamma)(\tau_2H)(\beta, \gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha, y)A(\beta, y)}{H(y, \gamma)}=D\frac{H(\beta, \alpha)}{A(\alpha, \gamma)H(\beta, \gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha, y)(\tau_1H)(\beta, y)}{(\xi A)(\gamma, y)}=D\frac{A(\alpha, \beta)}{(\tau_1H)(\gamma, \alpha)(\tau_1H)(\gamma, \beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha, y)H(\beta, y)}{A(\gamma, y)}=D\frac{A(\alpha, \beta)}{H(\gamma, \alpha)H(\gamma, \beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y, \alpha)(\tau_1H)(y, \beta)}{(\xi A)(y, \gamma)}=D\frac{A(\alpha, \beta)}{(\tau_1H)(\alpha, \gamma)(\tau_1H)(\beta, \gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(y, \alpha)H(y, \beta)}{A(y, \gamma)}=D\frac{A(\alpha, \beta)}{H(\alpha, \gamma)H(\beta, \gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(\alpha, y)(\tau_1H)(\beta, y)}{(\tau_2H)(\gamma, y)}=D\frac{(\tau_1H)(\alpha, \beta)}{(\tau_1H)(\gamma, \alpha)(\xi A)(\gamma, \beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_1}{\tau_2}\sum_{y\in Y}\frac{A(\alpha, y)H(\beta, y)}{H(\gamma, y)}=D\frac{H(\alpha, \beta)}{H(\gamma, \alpha)A(\gamma, \beta)}, \quad (*3)$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y, \alpha)(\xi A)(y, \beta)}{(\tau_2H)(y, \gamma)}=D\frac{(\tau_1H)(\alpha, \beta)}{(\xi A)(\alpha, \gamma)(\tau_1H)(\beta, \gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_1}{\tau_2}\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)A(y,\beta)}{H(y,\gamma)}=D\frac{H(\alpha,\beta)}{A(\alpha,\gamma)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y,\alpha)(\tau_2H)(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\gamma,\alpha)(\tau_2H)(\gamma,\beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha,y)(\tau_1H)(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\alpha,\gamma)(\tau_1H)(\gamma,\beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y,\alpha)(\tau_1H)(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\beta,\alpha)}{(\tau_1H)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\beta,\gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\beta,\alpha)}{H(\gamma,\alpha)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha,y)(\tau_2H)(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\beta,\alpha)}{(\tau_1H)(\alpha,\gamma)(\tau_2H)(\beta,\gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\beta,\alpha)}{H(\alpha,\gamma)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha,y)(\xi A)(\beta,y)}{(\tau_2H)(\gamma,y)}=D\frac{(\tau_1H)(\beta,\alpha)}{(\xi A)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_1}{\tau_2}\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)A(\beta,y)}{H(\gamma,y)}=D\frac{H(\beta,\alpha)}{A(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(y,\alpha)(\tau_1H)(y,\beta)}{(\tau_2H)(y,\gamma)}=D\frac{(\tau_1H)(\beta,\alpha)}{(\tau_1H)(\alpha,\gamma)(\xi A)(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_1}{\tau_2}\sum_{y\in Y}\frac{A(y,\alpha)H(y,\beta)}{H(y,\gamma)}=D\frac{H(\beta,\alpha)}{H(\alpha,\gamma)A(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(\alpha,y)(\tau_1H)(\beta,y)}{(\xi A)(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\gamma,\beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y,\alpha)(\tau_1H)(y,\beta)}{(\xi A)(y,\gamma)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\alpha,\gamma)(\tau_1H)(\beta,\gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(y,\beta)}{A(y,\gamma)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y,\alpha)(\xi A)(y,\beta)}{(\tau_1H)(\gamma,y)}=D\frac{(\tau_1H)(\alpha,\beta)}{(\xi A)(\gamma,\alpha)(\tau_2H)(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)A(y,\beta)}{H(\gamma,y)}=D\frac{H(\alpha,\beta)}{A(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(y,\alpha)(\tau_2H)(y,\beta)}{(\tau_1H)(y,\gamma)}=D\frac{(\tau_1H)(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\gamma,\alpha)(\xi A)(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{A(y,\alpha)H(y,\beta)}{H(y,\gamma)}=D\frac{H(\alpha,\beta)}{H(\gamma,\alpha)A(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y,\alpha)(\xi A)(\beta,y)}{(\tau_1H)(\gamma,y)}=D\frac{(\tau_2H)(\beta,\alpha)}{(\xi A)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_1}{\tau_2}\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)A(\beta,y)}{H(\gamma,y)}=D\frac{H(\beta,\alpha)}{A(\gamma,\alpha)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(y,\alpha)(\tau_1H)(\beta,y)}{(\tau_1H)(y,\gamma)}=D\frac{(\tau_2H)(\beta,\alpha)}{(\tau_1H)(\gamma,\alpha)(\xi A)(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{A(y,\alpha)H(\beta,y)}{H(y,\gamma)}=D\frac{H(\beta,\alpha)}{H(\gamma,\alpha)A(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_2H)(y,\alpha)(\tau_1H)(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\beta,\alpha)}{(\tau_2H)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\gamma,\beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\beta,\alpha)}{H(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y,\alpha)(\tau_1H)(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{(\xi A)(\beta,\alpha)}{(\tau_1H)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\beta,\gamma)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^4\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\beta,\alpha)}{H(\gamma,\alpha)H(\beta,\gamma)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\xi A)(y,\alpha)(\tau_1H)(y,\beta)}{(\tau_1H)(\gamma,y)}=D\frac{(\tau_1H)(\beta,\alpha)}{(\tau_2H)(\gamma,\alpha)(\xi A)(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{A(y,\alpha)H(y,\beta)}{H(\gamma,y)}=D\frac{H(\beta,\alpha)}{H(\gamma,\alpha)A(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_2H)(y,\alpha)(\xi A)(y,\beta)}{(\tau_1H)(y,\gamma)}=D\frac{(\tau_1H)(\beta,\alpha)}{(\xi A)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\xi^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)A(y,\beta)}{H(y,\gamma)}=D\frac{H(\beta,\alpha)}{A(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_1H)(y,\alpha)(\tau_1H)(y,\beta)}{(\xi A)(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{(\tau_2H)(\gamma,\alpha)(\tau_2H)(\gamma,\beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(y,\beta)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

$$\eta\sum_{y\in Y}\frac{(\tau_2H)(y,\alpha)(\tau_2H)(y,\beta)}{(\xi A)(y,\gamma)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{(\tau_1H)(\gamma,\alpha)(\tau_1H)(\gamma,\beta)},$$

$$\frac{\eta}{\xi}\tau_1^2\tau_2^2\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(y,\beta)}{A(y,\gamma)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\gamma,\alpha)H(\gamma,\beta)},$$

これら32個の式は，右側に現れる式の中で左辺に現れる係数を見ると，次の４つである。

$$\eta\xi^{-1}\tau_1^2\tau_2^2,\ \eta^2\xi^2\tau_2\tau_1^{-1},\ \eta^2\xi^2\tau_1\tau_2^{-1},\ \eta\xi^{-1}\tau_1^4.$$

今，これらの係数が１とすると，

$$\tau_2=\eta\xi^2\tau_1,\ \tau_1^4=\eta^{-1}\xi$$

で成り立っている。

補題2.2. H は対称な *Hadamard* 行列である。

Proof. (∗2) と (∗3) の右辺を見ると，

$$H(\beta,\alpha)H(\gamma,\alpha)=H(\alpha,\beta)H(\alpha,\gamma)$$

である。この式はすべての $\alpha,\beta,\gamma\in Y$ に対して成り立つので，

$$H(\beta,y)H(\gamma,y)=H(y,\beta)H(y,\gamma)\ \text{for}\ y\in Y$$

である。γ を α で置き換えると，

$$H(\beta,y)H(\alpha,y)=H(y,\beta)H(y,\alpha),$$

$$H(y,\beta)=\frac{H(\alpha,y)}{H(y,\alpha)}H(\beta,y)$$

と変形できる。

(*1) の LHS は

$$\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(\alpha,y)}{A(\gamma,y)H(y,\alpha)}H(\beta,y)$$

$$=\sum_{y\in Y}\frac{H(y,\alpha)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}$$

$$=\frac{H(\gamma,\alpha)H(\beta,\gamma)}{-u^3}+u\sum_{y\in Y-\{\gamma\}}H(y,\alpha)H(\beta,y)$$

$$=-\frac{H(\gamma,\alpha)H(\beta,\gamma)}{u^3}+u\left(\sum_{y\in Y}H(y,\alpha)H(\beta,y)-H(\gamma,\alpha)H(\beta,\gamma)\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{u^3}+u\right)H(\gamma,\alpha)H(\beta,\gamma)+u\sum_{y\in Y}H(y,\alpha)H(\beta,y).$$

(*1) の RHS は $\alpha=\beta$ なら，$D=-u^2-u^{-2}$ を使うと

$$(1+u^4)uH(\alpha,\gamma)H(\gamma,\alpha)$$

である。

$$u\sum_{y\in Y}H(\alpha,y)H(y,\alpha)=\frac{(1+u^4)^2}{u^3}H(\alpha,\gamma)H(\gamma,\alpha)$$

$$\sum_{y\in Y}H(\alpha,y)H(y,\alpha)=\left(\frac{1+u^4}{u^2}\right)^2H(\alpha,\gamma)H(\gamma,\alpha)$$

となる。H は Hadamard 行列より

$$\sum_{y\in Y}H(\alpha,y)H(y,\alpha)=n$$

である。従って，$H(\alpha,\gamma)H(\gamma,\alpha)=1$ となる。従って，H は対称行列で

ある。

H が対称なら，上の32個の式は次の２つの式に帰着する：

$$\sum_{y\in Y}\frac{H(\alpha,y)H(\beta,y)}{A(\gamma,y)}=D\frac{A(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)H(\gamma,\beta)},$$

$$\sum_{y\in Y}\frac{A(\alpha,y)H(\beta,y)}{H(\gamma,y)}=D\frac{H(\alpha,\beta)}{H(\alpha,\gamma)A(\gamma,\beta)}.$$

これらの式が成り立つことは，[17](Lemma 4.1, Lemma 4.2）による。

参　考　文　献

[１] E. Bannai and Et. Bannai, *Generalized generalized spin models（four-weight spin models)*, Pacific J. Math. **170**（1995), 1-16.

[２] E. Bannai, Et. Bannai and F. Jaeger *On Spin Models, Modular Invariance, and Duality,* J. Algebraic Combin. **6**（1997), 203-228.

[３] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984.

[４] Et. Bannai and A. Munemasa, *Duality maps of finite abelian groups and their applications to spin models,* J. Algebraic Combin. **8**（1998), 223-233.

[５] C. Bracken and G. McGuire, *Characterization of SDP designs that yield certain spin models,* Des. Codes Cryptogr. **36**（2005), 45-52.

[６] C. Bracken and G. McGuire, *On quasi-3 designs and spin models,* Discrete Math. **294**（2005), 21-24.

[７] H. Guo, *Classification of spin models with at most* 10 *vertices,* Kyushu J. Math. **51**（1997), 15-34.

[８] T. Ikuta and A. Munemasa, *Spin models constructed from Hadamard matrices,* preprint.

[９] T. Ikuta and K. Nomura, *General form of non-symmetric spin models,* J. Algebraic Combin. **12**（2000), 59-72.

[10] F. Jaeger, M. Matsumoto, and K. Nomura, *Bose-Mesner algebras related to type II matrices and spin models,* J. Algebraic Combin. **8**（1998), 39-72.

[11] F. Jaeger and K. Nomura, *Symmetric versus non-symmetric spin models for link invariants,* J. Algebraic Combin. **10**（1999), 241-278.

[12] V. F. R. Jones, *On knot invariants related to some statistical mechanical models,* Pacific J. Math. **137**（1989), 311-336.

[13] K. Kawagoe, A. Munemasa, and Y. Watatani, *Generalized spin models,* J.

Knot Theory Ramifications **3** (1994), 465-475.

[14] P. Manches and S. Ceroi, *Spin models, association schemes and the Nakanishi-Montesinos Conjecture,* European J. Combin. **23** (2002), 833-844.

[15] K. Nomura, *Spin models constructed from Hadamard matrices,* J. Combin. Theory Ser. A **68** (1994), 251-261.

[16] K. Nomura, *An algebra associated with a spin model,* J. Algebraic Combin. **6** (1997), 53-58.

[17] K. Nomura, *Spin models of index 2 and Hadmard models,* J. Algebraic Combin. **17** (2003), 5-17.